SÉRIES DE FOURIER

N. RAYMOND

TABLE DES MATIÈRES

Prérequis pour ce cours : convergence des suites et séries de fonctions (simple, uniforme, normale), intégration de Lebesgue, notion de produit scalaire. Suivant les connaissances des étudiants, la connaissance de l'intégrale de Riemann pourra suffire. Au besoin, on fera des rappels sur les espaces (pré-)hilbertiens (définitions et propriétés élémentaires du produit scalaire).

1. INTRODUCTION HEURISTIQUE ET HISTORIQUE

Avant d'expliquer ce que sont les séries de Fourier et de décrire leurs propriétés, nous nous proposons d'analyser un exemple issu de la physique : la propagation de la chaleur dans une tige (de longueur 1) isolée à ses extrémités. Elle est gouvernée par

(i) l'**équation de la chaleur** :

$$\partial_t \Psi(x,t) = \partial_x^2 \Psi(x,t)\,, \quad \forall (x,t) \in [0,1]\times]0,+\infty[\,,$$

(ii) la **condition initiale** donnée par $\Psi(x,0) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, où $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$,

(iii) et la **condition aux limites** $\Psi(0,t) = \Psi(1,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Ce phénomène a intéressé Joseph Fourier (1768-1830) dans sa *Théorie analytique de la chaleur* [1] (1822) via les séries qui portent aujourd'hui son nom. On y lit notamment :

« Ce mouvement peut toujours être décomposé en plusieurs autres dont chacun s'accomplit séparément comme s'il avait lieu seul. Cette superposition des effets simples est un des éléments fondamentaux de la théorie de la chaleur. » [2]

Nous nous proposons d'examiner les questions suivantes, surtout heuristiquement, par la méthode introduite par Fourier. Posons [3]

$$\mathscr{E} = \left\{ \Psi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\,, \Psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R}) \right\}\,.$$

Existe-t-il une fonction vérifiant (i), (ii), (iii) et qui soit la restriction d'une fonction de $\mathscr{E}$? Cette solution est-elle unique ?

La réponse à la première question fera apparaître assez naturellement la notion de série de Fourier.

1.1. **Existence.**

1.1.1. *Solutions particulières de l'équation.* Recherchons des solutions de (i) sous la forme $\Psi(x,t) = \alpha(x)\psi(t)$. On en déduit que

$$\psi'(t)\alpha(x) = \psi(t)\alpha''(x)\,. \tag{1.1}$$

Soit $c \in \mathbb{R}$. Si ψ et α vérifient $\psi'(t) = c\psi(t)$ et $\alpha''(x) = c\alpha(x)$, ils vérifient (1.1). Considérons le cas $c < 0$ et écrivons $c = -\omega^2$. On peut donc choisir

$$\psi(t) = e^{-\omega^2 t}$$

et

$$\alpha(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\,.$$

Cherchons aussi des solutions qui satisfont à (iii). On a donc $A = 0$ et $\sin(\omega) = 0$. On doit donc avoir $\omega = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Noter que, dans le cas $c \geq 0$, on trouve que α est nulle.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : (x,t) \mapsto \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}$ appartient à $\mathscr{E}$ et satisfait (i) et (iii). Il en est de même de toute combinaison linéaire finie des f_k.

---

1. voir le Chapitre IV (§239 et suivants)
2. Chapitre III, §203
3. Dans cette section, on pourra choisir la définition suivante. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une fonction φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur un produit d'intervalles ouverts U lorsqu'elle possède des dérivées partielles en tout point (x_0,t_0) de U, jusqu'à l'ordre k, notées $\partial_x^m \partial_t^\ell \varphi(x_0,t_0)$ (avec $m+\ell \leq k$), et qu'elles définissent toutes des fonctions continues en les deux variables.

1.1.2. *Une solution plus générale.* Plus généralement, considérons une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k| < +\infty$. Considérons la série définie, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, par

$$S(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k f_k(x,t)\,.$$

Cette série de fonctions est normalement convergente (et donc uniformément). Les f_k sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ et par conséquent S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$. La fonction S vérifie (iii) ; elle est impaire et 2-périodique.

Montrons que $S\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$. Soit $a>0$. Examinons la série des dérivées à l'ordre $n\in\mathbb{N}$ en x et m en t, c'est-à-dire

$$\sum_{k\geq 1} b_k (k\pi)^n(-k^2\pi^2)^m \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}\,.$$

Cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}\times[a,+\infty[$ puisque

$$\sum_{k\geq 1}|b_k|k^{n+2m}e^{-k^2\pi^2 a} < +\infty\,.$$

Il s'ensuit que S admet des dérivées partielles à tout ordre et en toutes les variables. Toutes ces dérivées sont continues sur $\mathbb{R}\times]a,+\infty[$. Il s'ensuit que $S\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\times]a,+\infty[)$ pour tout $a>0$ et ainsi $S\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$. Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, on a

$$\partial_t S(x,t)=\sum_{k\geq 1} -k^2\pi^2 b_k\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}\,,$$

et

$$\partial_x^2 S(x,t)=\sum_{k\geq 1} -k^2\pi^2 b_k\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}\,,$$

de sorte que S vérifie (i).

1.1.3. *Condition initiale.* Reste à savoir s'il existe une suite $(b_k)_{k\geq 1}\in\ell^1(\mathbb{N}^*)$ telle que S satisfasse (ii), c'est-à-dire telle que, pour tout $x\in[0,1]$,

$$f(x)=S(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sin(k\pi x)\,.$$

Il est naturel d'introduire la fonction $\tilde{f}$, prolongement par imparité et 2-périodicité de f. C'est une fonction appartenant à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Peut-on donc trouver $(b_k)_{k\geq 1}\in\ell^1(\mathbb{N}^*)$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sin(k\pi x)\,? \tag{1.2}$$

Remarque 1.1. Ce problème est celui de la **décomposition en série de Fourier** et ce cours va y apporter des réponses générales. Considérant une fonction T-périodique g, à valeurs réelles, peut-on trouver deux suites de coefficients $(a_k(g))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(g))_{k\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$g=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{k\geq 1}a_k(g)\cos\left(\frac{2k\pi\cdot}{T}\right)+\sum_{k\geq 1}b_k(g)\sin\left(\frac{2k\pi\cdot}{T}\right)\,?$$

Si la fonction g est à valeurs complexes, il s'agit de trouver une suite $(c_k(g))_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$g=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(g)e^{\frac{2ik\pi\cdot}{T}}\,.$$

Le but du cours est de savoir si de tels coefficients existent et **en quel(s) sens** les séries convergent.

Nous démontrerons plus tard que, pour une fonction périodique, impaire et de classe $\mathscr{C}^1$, une telle suite $(b_k)_{k\geq 1} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$ existe. Dans ce cas, il est aisé de trouver l'expression de b_k. Considérons, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^2 \tilde{f}(x)\sin(m\pi x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Par convergence normale et donc uniforme de la série, nous pouvons permuter la série et l'intégrale, si bien que

$$\int_0^2 \tilde{f}(x)\sin(m\pi x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_0^2 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,\mathrm{d}x\,.$$

On rappelle que

$$\sin(k\pi x)\sin(m\pi x) = \frac{1}{2}\left(\cos(k\pi x - m\pi x) - \cos(k\pi x + m\pi x)\right)\,.$$

On vérifie alors que, pour $k \neq m$,

$$\int_0^2 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\int_0^2 \sin^2(k\pi x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

On en tire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$b_k = \int_0^2 \tilde{f}(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on pose donc :

$$\Psi(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_0^2 \tilde{f}(y)\sin(k\pi y)\,\mathrm{d}y\right)\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}\,.$$

La fonction Ψ satisfait à (i), (ii), (iii) et appartient à $\mathscr{E}$.

1.2. **Unicité.** Supposons que Ψ_1 et Ψ_2 soient solutions du problème et introduisons, pour tout $t \geq 0$,

$$\delta(t) = \int_0^1 |\Psi_1(x,t) - \Psi_2(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le théorème relatif aux intégrales de fonctions continues à paramètres, on sait que δ est continue sur $[0,+\infty[$. En fait, elle est même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $t > 0$,

$$\delta'(t) = 2\int_0^1 (\Psi_1 - \Psi_2)(\partial_t\Psi_1 - \partial_t\Psi_2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (\Psi_1 - \Psi_2)\partial_x^2(\Psi_1 - \Psi_2)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour tout $t > 0$, on peut intégrer par parties et on trouve :

$$\delta'(t) = -2\int_0^2 |\partial_x(\Psi_1 - \Psi_2)|^2\,\mathrm{d}x \leq 0\,.$$

La fonction δ est donc décroissante sur $[0,+\infty[$. De plus, $\delta(0) = 0$ et donc $\delta(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Il s'ensuit que, pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in [0,1]$,

$$\Psi_1(x,t) = \Psi_2(x,t)\,.$$

2. PROPRIÉTÉS HILBERTIENNES

Soit $T > 0$. Introduisons

$$\mathscr{H} = \{\psi \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)\}/\sim,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence de l'égalité presque partout pour la mesure de Lebesgue. Dans de nombreux énoncés, si la notion d'intégrale de Lebesgue n'est pas connue, $\mathscr{H}$ peut être remplacé par l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

On pose, pour tout $(f, g) \in \mathscr{H}^2$,

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f\overline{g}\,\mathrm{d}x\,.$$

Cette quantité est bien définie puisque

$$|f\overline{g}| \leq \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)\,,$$

et que le membre de droite est une fonction intégrable.

Proposition 2.1. *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{H}^2$. La norme associée est notée $\|\cdot\|$.*

Proposition 2.2 (Théorème de Pythagore)**.** *Pour tout $(f, g) \in \mathscr{H}^2$ tels que $\langle f, g\rangle = 0$, on a :*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2\,.$$

Proposition 2.3. *$(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert.*

Définition 2.4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{T}}\,.$$

Lemme 2.5. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.*

Exercice 2.6. Montrer que les familles $\left(\cos\left(\frac{2\pi n\cdot}{T}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sin\left(\frac{2\pi n\cdot}{T}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des familles orthogonales et qu'elles sont orthogonales l'une à l'autre. On calculera la norme de chaque élément de ces familles.

2.1. **Coefficients et sommes partielles de Fourier.**

Définition 2.7 (Coefficients de Fourier)**.** Pour tout $f \in \mathscr{H}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2i\pi nx}{T}}\,\mathrm{d}x\,,$$

et

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x\,,\qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x\,.$$

On observe les relations :

$$c_n(f) + c_{-n}(f) = a_n(f)\,,\quad c_{-n}(f) - c_n(f) = ib_n(f)\,,$$

ou encore :

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\left(a_n(f) - ib_n(f)\right)\,.$$

Remarque 2.8. Noter que, par périodicité, l'intervalle d'intégration peut être remplacé par n'importe quel intervalle d'amplitude T.

Lemme 2.9. *On a les propriétés suivantes.*

- Lorsque f est paire, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_{-n}(f)$. Cela équivaut à $b_n(f) = 0$.

- Lorsque f est impaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$. Cela équivaut à $a_n(f) = 0$.

Exemple 2.10. On prend $T = 2\pi$. On considère la fonction f, 2π-périodique, impaire, telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \in]0, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.

On a $c_0(f) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t = \frac{in^{-1}}{2\pi} \left(-[e^{-int}]_{-\pi}^{0} + [e^{-int}]_0^{\pi} \right) = i(\pi n)^{-1}(-1 + (-1)^n) \, .$$

Les coefficients d'ordre pair sont nuls. On calculera les $a_n(f)$ et les $b_n(f)$.

Exemple 2.11. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. On considère la fonction 2π-périodique f_α définie par : $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$. On observe que f_α est paire, continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Calculons ses coefficients de Fourier. Les b_n sont nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = 2\pi^{-1} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t \, .$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t &= 2\mathrm{Re} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) e^{int} \, \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{Re} \int_0^{\pi} e^{i\alpha t} e^{int} \, \mathrm{d}t + \mathrm{Re} \int_0^{\pi} e^{-i\alpha t} e^{int} \, \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{Re} \left(\frac{e^{i(\alpha+n)\pi} - 1}{i(\alpha+n)} \right) + \mathrm{Re} \left(\frac{e^{i(-\alpha+n)\pi} - 1}{i(-\alpha+n)} \right) \\
&= \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(-\alpha+n)\pi}{-\alpha+n} \\
&= 2\alpha(-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2} \, ,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$a_n = 2\pi^{-1} \alpha (-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2} \, .$$

Définition 2.12 (Sommes partielles de Fourier)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n(x) \, .$$

Cela s'écrit aussi

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T} \right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T} \right) \right) \, .$$

On pose

$$E_N = \mathrm{vect}(e_n, -N \leq n \leq N) \, .$$

Lemme 2.13. *Pour tout $f \in \mathscr{H}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :*

$$f - S_N(f) \in E_N^{\perp} \, .$$

En particulier, on a : $\mathscr{H} = E_N \overset{\perp}{\oplus} E_N^{\perp}$.

2.2. **Inégalité de Bessel et égalité de Parseval.** Le théorème de Pythagore permet d'en déduire la proposition suivante.

Proposition 2.14 (Inégalité de Bessel)**.** *Pour tout $f \in \mathscr{H}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 + \|f - S_N(f)\|^2 .$$

En particulier, on a :

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2 ,$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Proposition 2.15. *La suite $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge. Sa somme est notée $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$.*

Nous démontrerons plus tard le théorème suivant.

Théorème 2.16. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, c'est-à-dire, que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée et*

$$\overline{\mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})} = \mathscr{H} ,$$

cette dernière égalité étant équivalente à

$$\mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})^\perp = \{0\} .$$

Exercice 2.17. Démontrer l'équivalence mentionnée dans le théorème.

Corollaire 2.18 (Égalité de Parseval)**.** *Pour tout $f \in \mathscr{H}$, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n = f , \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2 .$$

En particulier, l'application $\mathscr{H} \ni f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie (bijective).

Démonstration. Proposons deux preuves de la première égalité.

i. Utilisons la proposition 2.15 et notons

$$S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n .$$

Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, en vertu de la continuité du produit scalaire et du caractère orthonormé de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on a :

$$\langle S, e_\ell \rangle = \lim_{N\to+\infty} \left\langle \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n, e_\ell \right\rangle = c_\ell(f) .$$

Ainsi, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, on a $\langle S - f, e_\ell \rangle = 0$. On en déduit que $S - f \in \mathrm{vect}(e_\ell, \ell \in \mathbb{Z})^\perp$ et donc, par le théorème 2.16, $S - f = 0$.

ii. Commençons par observer que, par le théorème 2.16, pour tout $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathscr{H}$, il existe $P \in \mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})$ tel que

$$\|f - P\|^2 \leq \varepsilon .$$

Par définition, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$P \in E_{N_0} \subset E_N .$$

Par le lemme 2.13 et le théorème de Pythagore, on a, pour tout $N \geq N_0$,

$$\|f-P\|^2 = \|\underbrace{f-S_N(f)}_{\in E_N^\perp}\|^2 + \|\underbrace{S_N(f)-P}_{\in E_N}\|^2 \geq \|f-S_N(f)\|^2 .$$

La conclusion s'ensuit. Noter que cette deuxième preuve évite l'utilisation de la convergence a priori de $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ et la démontre.

La deuxième égalité est une conséquence de la première et de la proposition 2.14. □

Remarque 2.19. Lorsque f est à valeurs **réelles**, nous pouvons également écrire

$$\frac{1}{4}|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \|f\|^2 .$$

En effet, on a toujours

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |c_n(f)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |c_{-n}(f)|^2 ,$$

et, comme f est à valeurs réelles,

$$|c_n(f)| = |c_{-n}(f)| ,$$

et

$$|c_n(f)|^2 = \frac{1}{4}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) .$$

Exemple 2.20. Reprenons l'exemple 2.10. On a, au sens de la norme de $\mathscr{H}$,

$$f(\cdot) = i\pi^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^{-1}(-1+(-1)^n)e^{in\cdot} .$$

De plus, l'égalité de Parseval fournit

$$\|f\|^2 = \pi^{-2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^{-2}|-1+(-1)^n|^2 .$$

On a :

$$\|f\|^2 = 1 ,$$

de sorte que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2k+1)^{-2} = \frac{\pi^2}{4} .$$

Comme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k^{-2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}(2k)^{-2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}(2k+1)^{-2} ,$$

il s'ensuit

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k^{-2} = \frac{\pi^2}{3} ,$$

et donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

2.3. **Régularité et décroissance des coefficients de Fourier.** Grâce à l'inégalité de Bessel, on peut voir que, pour tout $f \in \mathscr{H}$,

$$\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0 \, .$$

Cela peut aussi être déduit directement du lemme suivant.

Lemme 2.21 (Riemann-Lebesgue)**.** *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$*. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

Démonstration. Un résultat classique de densité est que $\mathscr{C}^1_0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathscr{C}^1_0(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On en tire, via l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

De plus, par intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{in} \int_{\mathbb{R}} g'(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x \, ,$$

et donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$

de sorte que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon \, .$$

□

Par intégration par parties successives et le lemme de Riemann-Lebesgue, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.22. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$*. Soit* f *une fonction de classe* $\mathscr{C}^k$ *et* T*-périodique. Alors, pour tout* $j \in \{1, \dots, k\}$ *et tout* $n \in \mathbb{Z}^*$*,*

$$c_n(f) = \frac{(-1)^j}{\left(\frac{2i\pi n}{T}\right)^j} c_n(f^{(j)}) \, .$$

En particulier,

$$c_n(f) = o(|n|^{-k}) \, .$$

Nous disposons d'une réciproque partielle.

Proposition 2.23. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$*. Soit* $f \in \mathscr{H}$ *telle que*

$$c_n(f) = \mathscr{O}(|n|^{-k-1-\varepsilon}) \, .$$

Alors f *est de classe* $\mathscr{C}^k$*.*

Démonstration. L'hypothèse implique, par comparaison à une série de Riemann, que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\,.$$

On en déduit, par convergence normale, que $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue S. Or, en vertu du corollaire 2.18, $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour $\|\cdot\|$. De plus, on a :

$$\|S_N(f) - S\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |S_N(f)(t) - S(t)|^2\,\mathrm{d}t \leq \|S_N(f) - S\|_\infty^2\,,$$

si bien que

$$\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - S\| = 0\,.$$

On en tire $S = f$. En particulier, f est continue.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_N(f)^{(j)}(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{2in\pi}{T}\right)^j c_n(f) e^{\frac{2in\pi x}{T}}\,.$$

Par hypothèse, on déduit que cette dernière série est normalement convergente puisque :

$$\left|\left(\frac{2in\pi}{T}\right)^j c_n(f) e^{\frac{2in\pi x}{T}}\right| = \left|\left(\frac{2in\pi}{T}\right)^j c_n(f)\right| = \mathscr{O}(|n|^{-1-\varepsilon})\,.$$

On en déduit que la suite $(S_N(f)^{(j)})_{N\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente. On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $j \in \{0, \ldots, k\}$,

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2in\pi}{T}\right)^j c_n(f) e^{\frac{2in\pi x}{T}}\,.$$

□

Proposition 2.24. *Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ et T-périodique. Alors $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Démonstration. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(f) = -\frac{1}{in} c_n(f')\,,$$

si bien que

$$2|c_n(f)| \leq \frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\,.$$

Par convergence d'une série de Riemann et l'inégalité de Bessel, on en déduit immédiatement $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. On procède ensuite comme dans la preuve de la proposition 2.23. □

Remarque 2.25. On peut remplacer $\mathscr{C}^1$ par « continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux ».

Exemple 2.26. On peut appliquer cette proposition pour répondre positivement à la question (1.2).

Exemple 2.27. Reprenons l'exemple 2.11. On rappelle que dans ce cas $b_n = 0$ et

$$a_n = 2\pi^{-1}\alpha(-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}\,.$$

On retrouve bien que $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. On a, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + 2\pi^{-1}\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx)\,.$$

En prenant $x = \pi$, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\pi \cot(\alpha\pi) = \alpha^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\,.$$

Il s'ensuit que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$,

$$\cot u - \frac{1}{u} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}\,.$$

Par prolongement par continuité en 0, on peut écrire, pour tout $u \in]-\pi, \pi[$,

$$\cot u - \frac{1}{u} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}\,.$$

La série étant normalement convergente sur tout intervalle compact contenu dans $]-\pi, \pi[$, on en tire

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_0^x \left(\cot u - \frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\,.$$

En passant à l'exponentielle, on en déduit le développement en produit eulérien du sinus :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[\,, \qquad \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\,.$$

3. Théorème de Dirichlet

3.1. **Énoncé et preuve.**

3.1.1. *Énoncé.*

Théorème 3.1 (Dirichlet)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose*

$$f(x^\pm) = \lim_{t\to x^\pm} f(t)\,,$$

et on suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\int_0^\eta \frac{|f(x^\pm) - f(x \pm t)|}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty\,.$$

Alors

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\,.$$

Remarque 3.2. Il se peut que la série de Fourier de f ne converge pas simplement vers f.

3.1.2. *Préliminaires.* Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. On pose

$$D_{N,T}(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{\frac{2i\pi kx}{T}} .$$

On peut observer que

$$\frac{1}{T}\int_0^T D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t = 1\,. \tag{3.1}$$

Lemme 3.3. *On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)D_{N,T}(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Lemme 3.4. *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus(T\mathbb{Z})$,*

$$D_{N,T}(x) = \frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi x}{T}\right]}{\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right)}\,.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus(2\pi\mathbb{Z})$. On a

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\alpha} = 1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} e^{ik\alpha}\right) = 1 + 2\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\frac{1-e^{iN\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right)\,.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\alpha} &= 1 + 2\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha(N+1)/2}\frac{e^{-iN\alpha/2}-e^{iN\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2}-e^{i\alpha/2}}\right) \\
&= 1 + 2\cos\left(\alpha(N+1)/2\right)\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \\
&= 1 + 2\left(\cos(\alpha N/2)\cos(\alpha/2) - \sin(\alpha N/2)\sin(\alpha/2)\right)\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \\
&= \cos(\alpha N) + \frac{\sin(\alpha N)\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\cos(\alpha N)\sin(\alpha/2) + \sin(\alpha N)\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \\
&= \frac{\sin(N+1/2)\alpha}{\sin(\alpha/2)}\,.
\end{aligned}$$

□

3.1.3. *Preuve.* Nous pouvons maintenant prouver le théorème. Soit $x \in \mathbb{R}$. On examine

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x-t)D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(x-t)D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(x-t)D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(x+t)D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(x-t)D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Par parité de $D_{N,T}$ et (3.1), on en tire

$$S_N(f)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} (f(x+t) - f(x^+))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} (f(x-t) - f(x^-))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrons que les deux intégrales du membre de droite tendent vers 0. Considérons seulement la première, la seconde se traitant de façon similaire. On écrit

$$\int_0^{T/2} (f(x+t) - f(x^+))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\eta} (f(x+t) - f(x^+))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t + \int_\eta^{T/2} (f(x+t) - f(x^+))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On a, par le lemme 3.4,

$$\int_\eta^{T/2} (f(x+t) - f(x^+))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t = \int_\eta^{T/2} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi t}{T}\right]\,\mathrm{d}t\,.$$

Considérant la fonction continue par morceaux et à support compact (qui est donc dans $L^1(\mathbb{R})$) :

$$t \mapsto \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \mathbb{1}_{[\eta,\frac{T}{2}]}(t)$$

et le lemme 2.21, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_\eta^{T/2} (f(x+t) - f(x^+))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Par le lemme 3.4,

$$\int_0^{\eta} (f(x+t) - f(x^+))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\eta} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi t}{T}\right]\,\mathrm{d}t\,.$$

Considérant la fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ (par hypothèse)[4] :

$$t \mapsto \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \mathbb{1}_{[0,\eta]}(t)$$

et le lemme 2.21, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{\eta} (f(x+t) - f(x^+))D_{N,T}(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Cela achève la preuve du théorème de Dirichlet.

3.2. **Exemple.** Reprenons l'Exemple 2.10. On peut clairement appliquer le théorème de Dirichlet. Pour tout $x \in]0,\pi[$, la série suivante est convergente et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} i(\pi n)^{-1}(-1 + (-1)^n)e^{inx} = 1\,.$$

Pour $x = 0$ ou $x = \pi$, on a aussi convergence et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} i(\pi n)^{-1}(-1 + (-1)^n)e^{inx} = 0\,.$$

4. Noter que cette fonction n'est pas nécessairement continue par morceaux à cause du comportement en 0.

Si en $x = \pi$, on choisit une autre valeur que 0 pour f, on voit que f n'est pas la somme de sa série de Fourier en $x = \pi$.

4. Théorème de Fejér

4.1. **Énoncé et preuve.**

4.1.1. *Énoncé.*

Théorème 4.1 (Fejér). *Soit f continue et T-périodique. Soit $M \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$\sigma_M(f)(x) = \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^{M} S_m(f)(x)\,.$$

Alors, $\sigma_M(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

4.1.2. *Préliminaires.* Soit $M \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F_{M,T}(x) = \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^{M} D_{m,T}(x)\,.$$

Noter que

$$\frac{1}{T} \int_0^T F_{M,T}(t)\,\mathrm{d}t = 1\,. \tag{4.1}$$

Grâce au lemme 3.3, on déduit le lemme suivant.

Lemme 4.2. *On a :*

$$\sigma_M(f)(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x-t) F_{M,T}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Lemme 4.3. *Soit $M \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (T\mathbb{Z})$, on a :*

$$F_{M,T}(x) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin^2((M+1)\pi x/T)}{\sin^2(\pi x/T)}\,.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. On a montré au lemme 3.4 que :

$$\sum_{k=-m}^{m} e^{ik\alpha} = \frac{\sin((m+1/2)\alpha)}{\sin(\alpha/2)}\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{M} \frac{\sin((m+1/2)\alpha)}{\sin(\alpha/2)} &= \frac{1}{\sin(\alpha/2)} \mathrm{Im} \left(e^{i\alpha/2} \sum_{m=0}^{M} e^{im\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{\sin(\alpha/2)} \mathrm{Im} \left(e^{i(M+1)\alpha/2} \frac{\sin((M+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \right) \\
&= \frac{\sin^2((M+1)\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}\,.
\end{aligned}$$

□

4.1.3. *Preuve.* Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [-T/2, T/2]$ et $M \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sigma_M(f)(x) - f(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(x-t) - f(x)) F_{M,T}(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

La fonction f est continue sur le compact $[-T, T]$; elle y est donc uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe $\eta \in]0, T/2]$ tel que, pour tout $(y, z) \in [-T, T]$ tel que $|y - z| \leq \eta$, on a

$$|f(y) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On en déduit que, pour tout $x \in [-T/2, T/2]$ et $t \in [-\eta, \eta]$, $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon$. On en tire, pour tout $x \in [-T/2, T/2]$,

$$\frac{1}{T} \left| \int_{|t| \leq \eta} (f(x-t) - f(x)) F_{M,T}(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{T} \int_{|t| \leq \eta} |f(x-t) - f(x)| F_{M,T}(t) \, \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$

où on a utilisé la positivité de $F_{M,T}$ donnée par le lemme 4.3 et (4.1). Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left| \int_{\eta \leq |t| \leq T/2} (f(x-t) - f(x)) F_{M,T}(t) \, \mathrm{d}t \right| &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{T(M+1)} \int_{\eta \leq |t| \leq T/2} \frac{\sin^2((M+1)\pi t/T)}{\sin^2(\pi t/T)} \, \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{(M+1) \sin^2(\pi \eta/T)} \, . \end{aligned}$$

Pour M assez grand, on a donc :

$$\frac{1}{T} \left| \int_{\eta \leq |t| \leq T/2} (f(x-t) - f(x)) F_{M,T}(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$

et ainsi, par l'inégalité triangulaire, pour M assez grand et pour tout $x \in [-T/2, T/2]$,

$$|\sigma_M(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \, .$$

4.2. **Applications.**

4.2.1. *Preuve du théorème 2.16.* Soit $f \in \mathscr{H}$ et $\varepsilon > 0$. Par densité, il existe $g \in \mathscr{C}_0^0(]0, T[)$ telle que

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \|f - g\|_{L^2(]0,T[)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On étend g par T-périodicité. Cette extension est continue.

On observe que, pour tout $M \in \mathbb{N}$, $\sigma_M(g) \in \mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})$. De plus,

$$\|\sigma_M(g) - g\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\sigma_M(g)(t) - g(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \|\sigma_M(g) - g\|_\infty^2 \, ,$$

si bien que

$$\lim_{M \to +\infty} \|\sigma_M(g) - g\| = 0 \, .$$

Pour M assez grand, on en déduit

$$\|\sigma_M(g) - g\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$

et donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\|f - \sigma_M(g)\| \leq \varepsilon \, .$$

4.2.2. *Un corollaire du théorème de Fejér.* En utilisant le lemme de Cesàro et le théorème de Fejér, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.4. *Soit f une fonction continue et T-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si la série de Fourier $(S_N(f)(x))_{N\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $f(x)$.*

5. Vers la transformation de Fourier

5.1. Des séries de Fourier à la transformée de Fourier.

Proposition 5.1. *Soit $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que f est nulle hors de $[-A, A]$ et on considère $T > A$. f peut être vue comme une fonction T-périodique. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$g_T(\xi) = T \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \mathbb{1}_{[n,n+1[} \left(\frac{T\xi}{2\pi}\right) .$$

On a, uniformément en ξ,

$$\lim_{T\to+\infty} g_T(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x .$$

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n_{\xi,T} \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{1}_{[n,n+1[}\left(\frac{T\xi}{2\pi}\right) = 1$. On a

$$g_T(\xi) = Tc_{n_{\xi,T}}(f) = \int_{[-A,A]} f(t)e^{-\frac{2i\pi n_{\xi,T}x}{T}}\,\mathrm{d}x .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|g_T(\xi) - \int_{[-A,A]} f(t)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x\right| &\leq 2A\|f\|_\infty \sup_{x\in[-A,A]} |e^{-\frac{2i\pi n_{\xi,T}x}{T}} - e^{-ix\xi}| \\ &= 2A\|f\|_\infty \sup_{x\in[-A,A]} |e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(n_{\xi,T}-\frac{T\xi}{2\pi}\right)x} - 1| \\ &\leq C(f)T^{-1} .\end{aligned}$$

□

Définition 5.2 (Transformation de Fourier)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on définit

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x .$$

Proposition 5.3. *Soit $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, $\widehat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}$, $\xi \mapsto \xi^k \widehat{f}^{(\ell)}(\xi)$ est bornée. En particulier $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe $\int$ d'une part et d'intégrations par parties d'autre part. □

5.2. Transformée de Fourier inverse.

Proposition 5.4. *Soit $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi .$$

Démonstration. On suppose que f est nulle hors de $[-A, A]$ et on considère $T > A$. f peut être vue comme une fonction T-périodique. Par la proposition 2.24, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\frac{2i\pi nx}{T}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{T} e^{\frac{2i\pi nx}{T}} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{2i\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t .$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\xi_{n,T} = \frac{2\pi n}{T}$. On remarque que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\xi_{n+1,T} - \xi_{n,T}) g_x(\xi_{n,T}) \,, \quad g_x(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} \,. \tag{5.1}$$

On écrit alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\xi_{n+1,T} - \xi_{n,T}) g_x(\xi_{n,T}) - \int_{\mathbb{R}} g_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{n=-N}^{N} \int_{\xi_{n,T}}^{\xi_{n+1,T}} (g_x(\xi_{n,T}) - g_x(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$
$$- \int_{\xi \geq \xi_{N+1,T}} g_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_{\xi \leq \xi_{-N,T}} g_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi + 2\pi \sum_{|n|\geq N+1} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nx}{T}} \,.$$

On en déduit, par la proposition 5.3 et comparaison à une intégrale de Riemann, que, pour tout $\alpha \geq 1$, il existe $C_\alpha(x)$ tel que

$$\left| \int_{\xi \geq \xi_{N+1,T}} g_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi \leq \xi_{-N,T}} g_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi - 2\pi \sum_{|n|\geq N+1} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nx}{T}} \right| \leq C_\alpha(x) \frac{T^\alpha}{N^\alpha} + \sum_{|n|\geq N} |c_n(f)| \,.$$

De plus, on peut appliquer la proposition 2.22 et une comparaison à une série de Riemann pour trouver que

$$\sum_{|n|\geq N} |c_n(f)| \leq \tilde{C}_\alpha \frac{T^\alpha}{N^\alpha} \,.$$

Puisque g_x est lipschitzienne, on en déduit que

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\xi_{n+1,T} - \xi_{n,T}) g_x(\xi_{n,T}) - \int_{\mathbb{R}} g_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right| \leq C_\alpha(x) \frac{T^\alpha}{N^\alpha} + \tilde{C}_\alpha \frac{T^\alpha}{N^\alpha}$$
$$+ \sum_{n=-N}^{N} C_x \int_{\xi_{n,T}}^{\xi_{n+1,T}} (\xi - \xi_{n,T})\,\mathrm{d}\xi \,.$$

Ainsi, on a

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\xi_{n+1,T} - \xi_{n,T}) g_x(\xi_{n,T}) - \int_{\mathbb{R}} g_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right| \leq \tilde{C}_\alpha(x) \left(\frac{T^\alpha}{N^\alpha} + \frac{N}{T^2} \right) \,.$$

On choisit alors $N = \lfloor T \rfloor^{\frac{3}{2}}$. Il n'y a plus qu'à faire tendre T vers $+\infty$ en rappelant (5.1). $\square$