Chants Magnétiques

en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches

Nicolas Raymond

10 novembre 2014

IRMAR

Le but du corps de travaux dont cet exposé va retracer l'histoire est de comprendre l'influence de la géométrie électro-magnétique et des conditions aux limites sur le spectre discret de l'équation de Schrödinger, dans des régimes asymptotiques.
En particulier, cet exposé est consacré à toutes sortes de réalisations auto-adjointes du Laplacien purement magnétique $(-i\hbar\nabla + \mathbf{A})^2$ sur un ouvert Ω.

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

L'essence des états liés

Devant les réalisations auto-adjointes du Laplacien en présence d'un champ électro-magnétique et de géométrie, quelques questions naturelles peuvent surgir :

1. Pourquoi y a-t-il du spectre discret ?
2. Peut-on en comprendre la structure ?
3. Peut-on décrire les états liés ?

Ces questions peuvent être très délicates et sont souvent entremêlées.

Les lois de l'attraction...

Les états liés sont souvent générés par la rupture d'une invariance due à une perturbation (électrique, magnétique, géométrique) qui a pour effet de créer un potentiel attractif dans l'espace des phases. Pour comprendre cette attraction, l'idée la plus simple est d'augmenter l'effet de la perturbation, ce qui amène souvent à des questions semi-classiques.

La nature est harmonique

L'une des idées principales de mes contributions est d'établir un parallèle entre le Laplacien purement électrique $-\hbar^2\Delta + V$ et le Laplacien purement magnétique.
La raison principale est issue de la célèbre approximation harmonique. Si le potentiel régulier V admet un unique minimum non dégénéré (et se comporte bien à l'infini), alors la n-ième valeur propre $\lambda_n(\hbar)$ admet le développement suivant

$$\lambda_n(\hbar) = V(x_{\min}) + \mu_n\hbar + o(\hbar),$$

où μ_n est la n-ième valeur propre de $D_x^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_{x_{\min}} V(x)$.

Quelques références

Concernant l'analyse semi-classique en présence de champs magnétiques, on peut consulter :

1. le livre de Fournais et Helffer,
   Spectral methods in Surface Superconductivity,
2. la revue de Helffer et Kordyukov,
   Semiclassical spectral asymptotics for a magnetic Schrödinger operator with non-vanishing magnetic field,
3. ou le livre,
   Little Magnetic Book [Ray14b].

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

Dans les vingt dernières années, de nombreux résultats concernant $\lambda_1(\hbar)$ (et/ou concernant les méthodes d'approximation par le champ uniforme et de redressement de la géométrie du domaine physique) ont été obtenus.

1. Lorsque le champ est constant :
   1. Bolley-Helffer, Bauman-Phillips-Tang, del Pino-Felmer-Sternberg (2D, disque),
   2. Helffer-Morame (2D et 3D, bord régulier).
2. Lorsque le champ est variable :
   1. Lu-Pan, suivi de [Ray09] (2D, bord régulier, champ ne s'annulant pas),
   2. Montgomery, Helffer-Morame, Helffer-Kordyukov (2D, bord régulier, champ qui s'annule),
   3. Lu-Pan, suivi de [Ray10a, Ray10b], Helffer-Kordyukov (3D, bord régulier, champ ne s'annulant pas),
   4. Bonnaillie-Noël, Bonnaillie-Noël-Dauge, Bonnaillie-Noël-Fournais (2D, champ ne s'annulant pas, coins), Bonnaillie-Noël-Dauge-Popoff (3D, coins).

Mais que disent ces travaux de $\lambda_2(\hbar)$?

La première valeur propre $\lambda_1(\hbar)$ est-elle simple ?

La stratégie originelle de Helffer et Morame

Il y a peu de cas où la simplicité de $\lambda_1(\hbar)$ est établie. Ce problème est directement lié à l'approximation des fonctions propres dans la limite semi-classique. Ainsi, rares sont aussi les cas où les fonctions sont elles aussi approchées.
Une raison à cela, peut-être, est l'esprit de l'analyse qui est basé sur des méthodes variationnelles. Pour mémoire, le principe de démonstration est le suivant :

1. une construction de fonctions tests pour le premier quotient de Rayleigh,
2. une réduction, via une partition de l'unité et des estimées d'Agmon, à des modèles locaux.

Du côté de chez Fournais, Helffer et Kordyukov

On peut mentionner deux travaux (cas réguliers) où la simplicité des valeurs propres est obtenue :

1. un cas de champ constant en dimension deux avec un bord régulier générique, par Fournais-Helffer,
2. un cas générique de champ variable en dimension deux, par Helffer-Kordyukov.

Dans ces travaux, un nouveau point de vue apparaît : les questions de microlocalisation jouent un rôle central, notamment pour établir rigoureusement une réduction de dimension à la Grushin dans le premier cas.

Du côté de chez Raymond et compagnie

Je vais maintenant présenter une stratégie qui ressort de tous mes travaux, puis je donnerai la saveur de grandes méthodes d'analyse micro-locale à la lumière desquelles j'ai considéré le Laplacien magnétique.

L'explication que nous devons juger satisfaisante est celle qui adhère à son objet : point de vide entre eux, pas d'interstice où une autre explication puisse aussi bien se loger ; elle ne convient qu'à lui, il ne se prête qu'à elle.

Bergson

Voici les deux grandes étapes pour les développements asymptotiques des valeurs propres en fonction d'un petit paramètre.

Dans le premier mouvement de l'analyse, on résout l'équation aux valeurs propres dans un espace de séries formelles approprié et après une mise sous forme normale.

Dans le premier mouvement de l'analyse, on résout l'équation aux valeurs propres dans un espace de séries formelles approprié et après une mise sous forme normale.

1. On obtient généralement une construction récursive multi-échelle basée sur des formules de Feynman-Hellmann et l'alternative de Fredholm (qui assure la compatibilité d'un système d'EDP « triangulaire »).

Dans le premier mouvement de l'analyse, on résout l'équation aux valeurs propres dans un espace de séries formelles approprié et après une mise sous forme normale.

1. On obtient généralement une construction récursive multi-échelle basée sur des formules de Feynman-Hellmann et l'alternative de Fredholm (qui assure la compatibilité d'un système d'EDP « triangulaire »).
2. Il s'agit souvent d'une théorie des perturbations par rapport à la position et à l'impulsion. Les profils ainsi construits sont à décroissance exponentielle.

Dans le premier mouvement de l'analyse, on résout l'équation aux valeurs propres dans un espace de séries formelles approprié et après une mise sous forme normale.

1. On obtient généralement une construction récursive multi-échelle basée sur des formules de Feynman-Hellmann et l'alternative de Fredholm (qui assure la compatibilité d'un système d'EDP « triangulaire »).
2. Il s'agit souvent d'une théorie des perturbations par rapport à la position et à l'impulsion. Les profils ainsi construits sont à décroissance exponentielle.
3. Il reste à appliquer le théorème spectral (plutôt que le principe du min-max qui donne des informations insuffisantes).

Le deuxième mouvement de l'analyse est le plus complexe : déterminer l'écart entre deux valeurs propres successives.

Le deuxième mouvement de l'analyse est le plus complexe : déterminer l'écart entre deux valeurs propres successives.

1. On établit des estimées grossières de localisation (spatiale) des fonctions propres.

Le deuxième mouvement de l'analyse est le plus complexe : déterminer l'écart entre deux valeurs propres successives.

1. On établit des estimées grossières de localisation (spatiale) des fonctions propres.
2. On effectue une forme normale (souvent par conjugaison avec une transformation métaplectique explicite).

Le deuxième mouvement de l'analyse est le plus complexe : déterminer l'écart entre deux valeurs propres successives.

1. On établit des estimées grossières de localisation (spatiale) des fonctions propres.
2. On effectue une forme normale (souvent par conjugaison avec une transformation métaplectique explicite).
3. Puis on cherche à localiser les fonctions propres par rapport à une variable qui mesure la distance à la "variété caractéristique" (qui a été redressée par la forme normale) ; en général, on contrôle les fonctions propres dans des espaces à poids en (x, ξ), parfois à l'aide d'états cohérents.

Le deuxième mouvement de l'analyse est le plus complexe : déterminer l'écart entre deux valeurs propres successives.

1. On établit des estimées grossières de localisation (spatiale) des fonctions propres.
2. On effectue une forme normale (souvent par conjugaison avec une transformation métaplectique explicite).
3. Puis on cherche à localiser les fonctions propres par rapport à une variable qui mesure la distance à la "variété caractéristique" (qui a été redressée par la forme normale) ; en général, on contrôle les fonctions propres dans des espaces à poids en (x, ξ), parfois à l'aide d'états cohérents.
4. On peut enfin en déduire une réduction de dimension rigoureuse à la Feshbach, qui permet parfois de raffiner les estimées de localisation en espace et de réduire le Laplacien magnétique à un Laplacien électrique.

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

Réduction de dimension à la Born-Oppenheimer

Les problèmes partiellement semi-classiques apparaissent dans le contexte des travaux de Martinez (et collaborateurs ; voir également Combes-Duclos-Seiler) où le principal problème est d'approcher les fonctions et valeurs propres d'opérateurs de la forme :

$$-h^2\Delta_s - \Delta_t + V(s,t).$$

L'idée, due à Born et Oppenheimer, est de remplacer, pour s fixé, l'operateur $-\Delta_t + V(s,t)$ par ses valeurs propres $\mu_k(s)$. Ensuite, on considère l'opérateur réduit :

$$-h^2\Delta_s + \mu_1(s),$$

qui relève du cadre de la théorie de Helffer-Sjöstrand.

Généricité du potentiel

Soit $k \geq 1$. L'opérateur de Montgomery généralisé d'ordre k est la réalisation auto-adjointe sur $\mathbb{R}$,

$$\mathfrak{L}_{\zeta}^{[k]} = D_t^2 + \left(\zeta - \frac{t^{k+1}}{k+1}\right)^2.$$

On peut trouver la preuve du théorème suivant en combinant les travaux de Helffer-Persson et Fournais-Persson.

Théorème

$\zeta \mapsto \nu_1^{[k]}(\zeta)$ admet un unique minimum en $\zeta = \zeta_0^{[k]}$ et il est non dégénéré.

Quatre points de vue sur l'approximation harmonique.

Expliquons comment on peut traiter la théorie spectrale de

$$\mathfrak{L}_\hbar = -\hbar^2 \partial_x^2 + V(x)$$

avec un potentiel électrique V régulier et possédant un unique minimum (supposé nul) non dégénéré en $x = 0$ avec $V''(0) = 2$.

Séries formelles naïves

On commence par faire un changement d'échelle :

$$x = \hbar^{1/2} y$$

et on développe le nouvel opérateur :

$$\mathcal{L}_\hbar = \hbar(-\partial_y^2 + y^2) + \sum_{j \geq 3} \hbar^{\frac{j}{2}} \frac{V^{(j)}(0)}{j!} y^j.$$

Formes normales de Birkhoff

On ne fait pas de dilatation ; on écrit directement le développement formel du symbole (dans la quantification de Weyl) :

$$\xi^2 + x^2 + \mathcal{O}_3.$$

Ici, le développement a lieu dans l'espace $\mathbb{R}[x, \xi, \hbar]$ muni du degré deg qui vérifie $\deg(x) = \deg(\xi) = 1$ et $\deg(\hbar) = 2$. On munit $\mathbb{R}[x, \xi, \hbar]$ du produit de Moyal $\star$ associé à la quantification de Weyl via la composition des opérateurs pseudo-différentiels.
On utilise alors une succession de symplectomorphismes pour normaliser le reste en le faisant commuter progressivement avec le symbole de l'oscillateur harmonique $|z|^2 = x^2 + \xi^2$.
On quantifie ensuite cette succession de symplectomorphismes à l'aide du théorème d'Egorov.

États cohérents

On pose

$$g_0(y) = \pi^{-1/4} e^{-|y|^2/2}.$$

Pour $(u, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on introduit l'état cohérent

$$f_{u,p}(y) = e^{ip \cdot y} g_0(y - u),$$

et la projection définie pour $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ par

$$\Pi_{u,p}\psi = \langle \psi, f_{u,p} \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\, \mathrm{d}y)} f_{u,p} = \psi_{u,p} f_{u,p},$$

qui satisfait la formule d'inversion

$$\psi = \int_{\mathbb{R}^2} \Pi_{u,p}\psi \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}p.$$

Constructions BKW

Continuons de scruter la question de l'approximation harmonique et améliorons le point de vue des séries formelles naïves. On cherche maintenant des fonctions propres de la forme :

$$\psi_\hbar = e^{-\frac{\Phi(x)}{\hbar}}(a_0 + \hbar a_1 + \cdots)$$

et des valeurs propres :

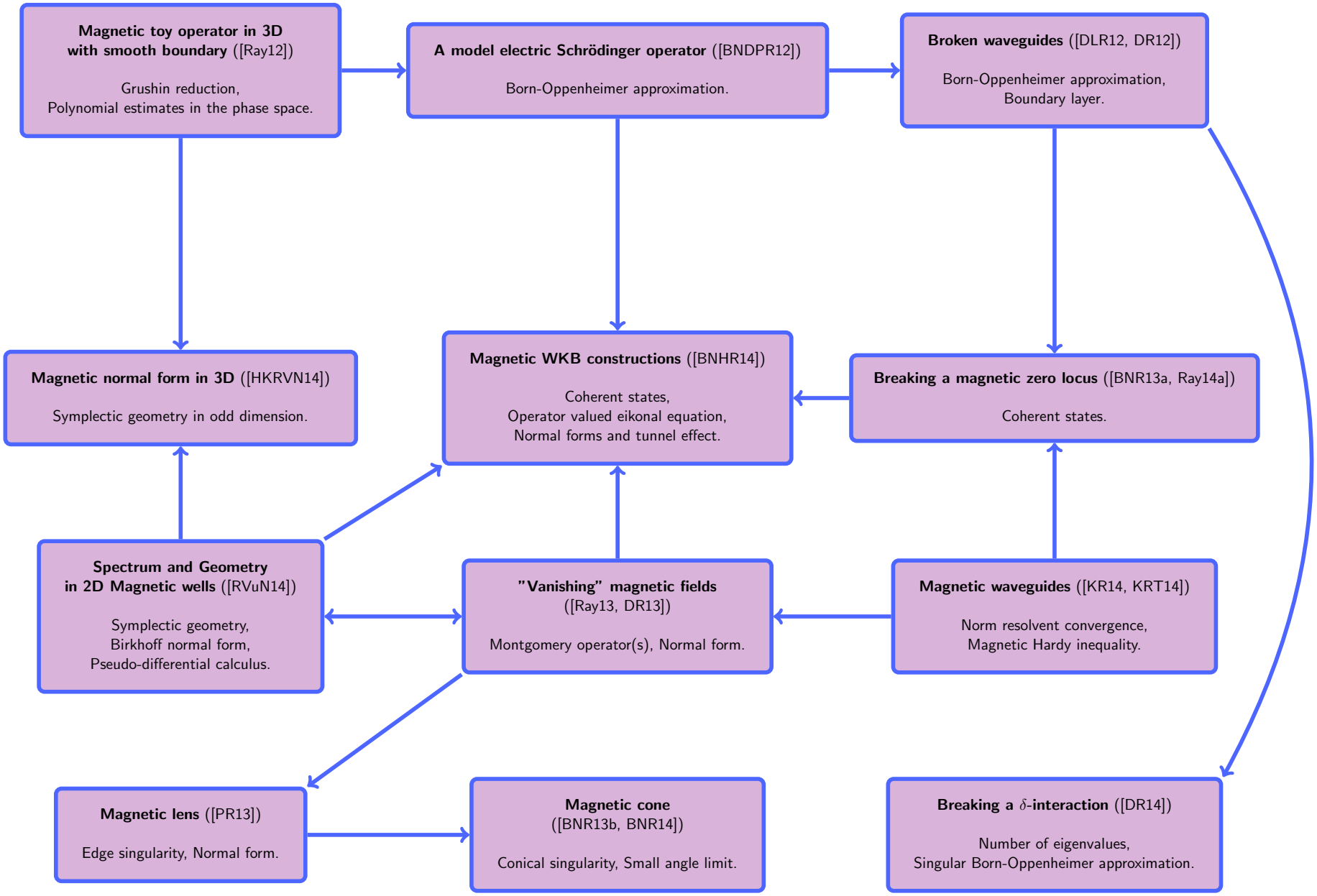
$$\lambda_\hbar = \hbar\lambda_0 + \cdots$$

On en déduit l'équation eikonale, puis l'équation de transport :

$$\Phi'(x)^2 = V(x), \quad \Phi'\partial_x a_0 + \partial_x(\Phi' a_0) = \lambda_0 a_0.$$

En linéarisant, on trouve

$$2x\partial_x a_0 = (\lambda_0 - 1)a_0.$$



(À la Recherche du Temps Perdu)

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

Discrete spectrum of a model Schrödinger operator on the half-plane with Neumann conditions
ZAMP (2012)
avec V. Bonnaillie-Noël, M. Dauge et N. Popoff

Pour $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, on introduit la réalisation de Neumann sur le demi-plan $\mathbb{R}^2_+ = \{t > 0\}$ de

$$\mathfrak{L}^{\mathrm{LP}}_\theta = -\Delta + V_\theta = D_s^2 + D_t^2 + (t\cos\theta - s\sin\theta)^2,$$

Le potentiel est minimal sur la droite $t\cos\theta = s\sin\theta$ qui fait un angle θ avec le bord. On note $\mathfrak{s}_n(\theta)$ la n-ième valeur propre (quand elle existe).

Lemme

Pour tout $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *il existe une valeur propre* $\mathfrak{L}_\theta^{\mathrm{LP}}$ *située sous le spectre essentiel qui vaut* $[1, +\infty)$.

Un résultat

Théorème

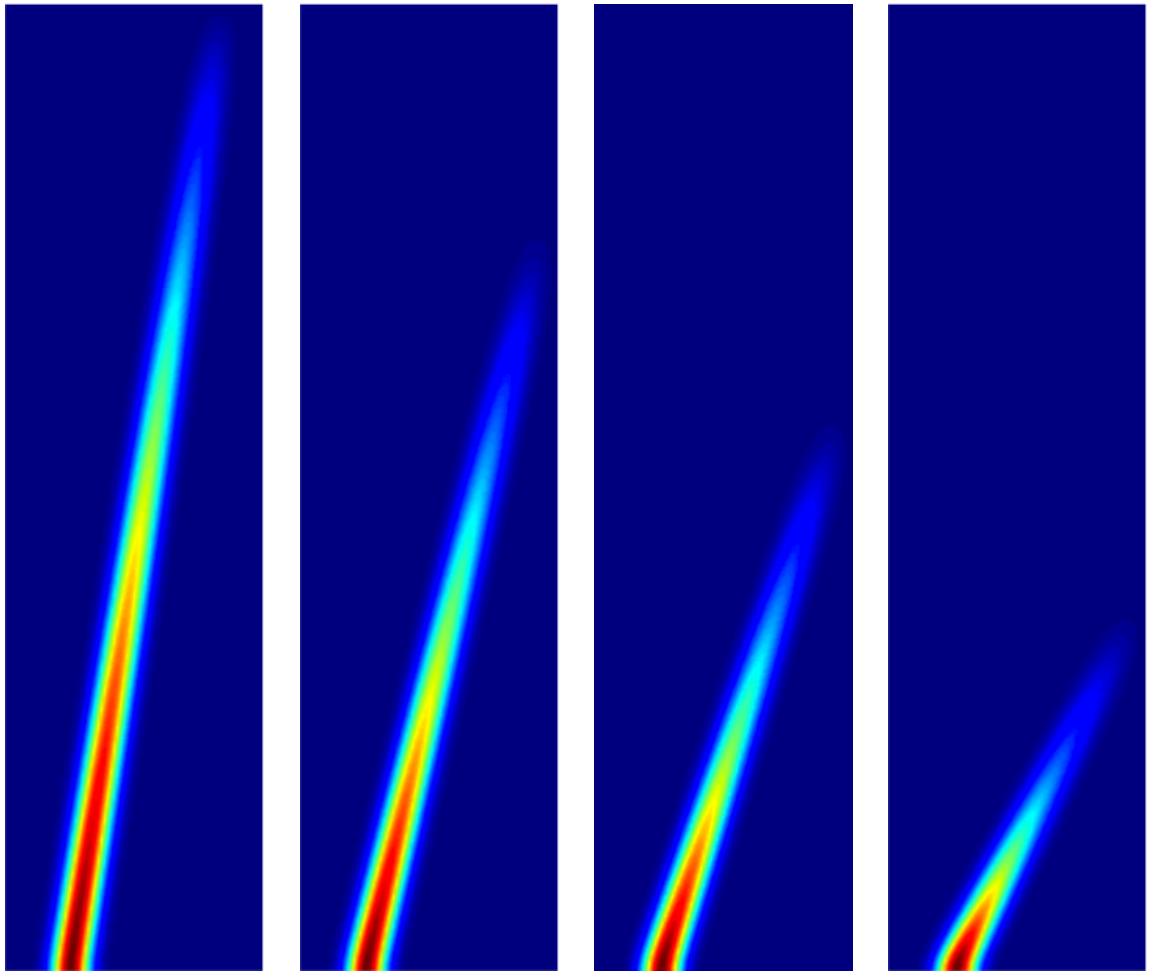
Les valeurs propres de $\mathfrak{L}_\theta^{\mathrm{LP}}$ *admettent les développements suivants :*

$$\mathfrak{s}_n(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} \sum_{j\geq 0} \mathfrak{s}_{n,j}\theta^j$$

avec $\mathfrak{s}_{n,0} = \Theta_0$ *et* $\mathfrak{s}_{n,1} = (2n-1)\sqrt{\frac{(\nu_1^{[0]})''(\zeta_0)}{2}}$.

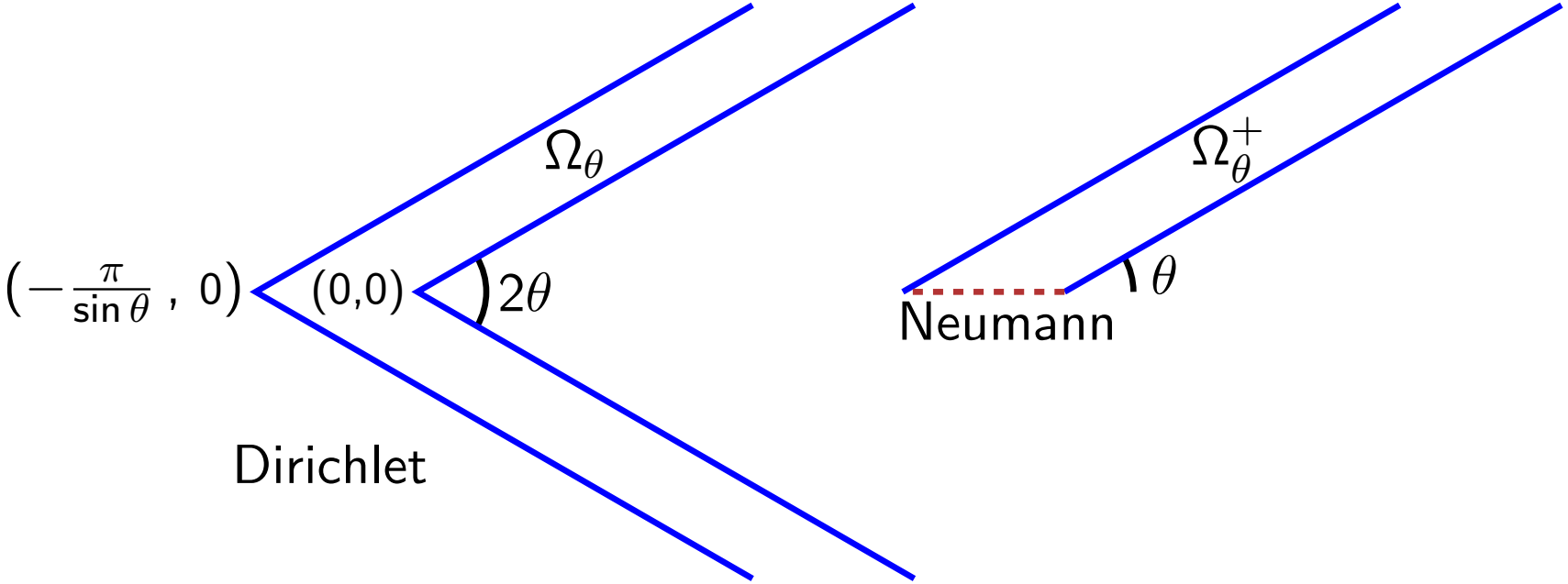
Une question pas si naïve

Heuristiquement, pourquoi $\mathfrak{L}_\theta^{\mathrm{LP}}$ possède-t-il du spectre discret ?



$\mathfrak{s}_1(\theta)$	1.0001656284	0.99987798948	0.99910390126	0.99445407220

FIGURE – État fondamental de $\mathfrak{L}_\theta^{\mathrm{LP}}$ pour $\theta = \vartheta\pi/2$ avec $\vartheta = 0.9$, 0.85, 0.8 et 0.7.


Ω_θ
$\left(-\frac{\pi}{\sin\theta}\ ,\ 0\right)$
(0,0)
2θ
Dirichlet
Ω_θ^+
θ
Neumann

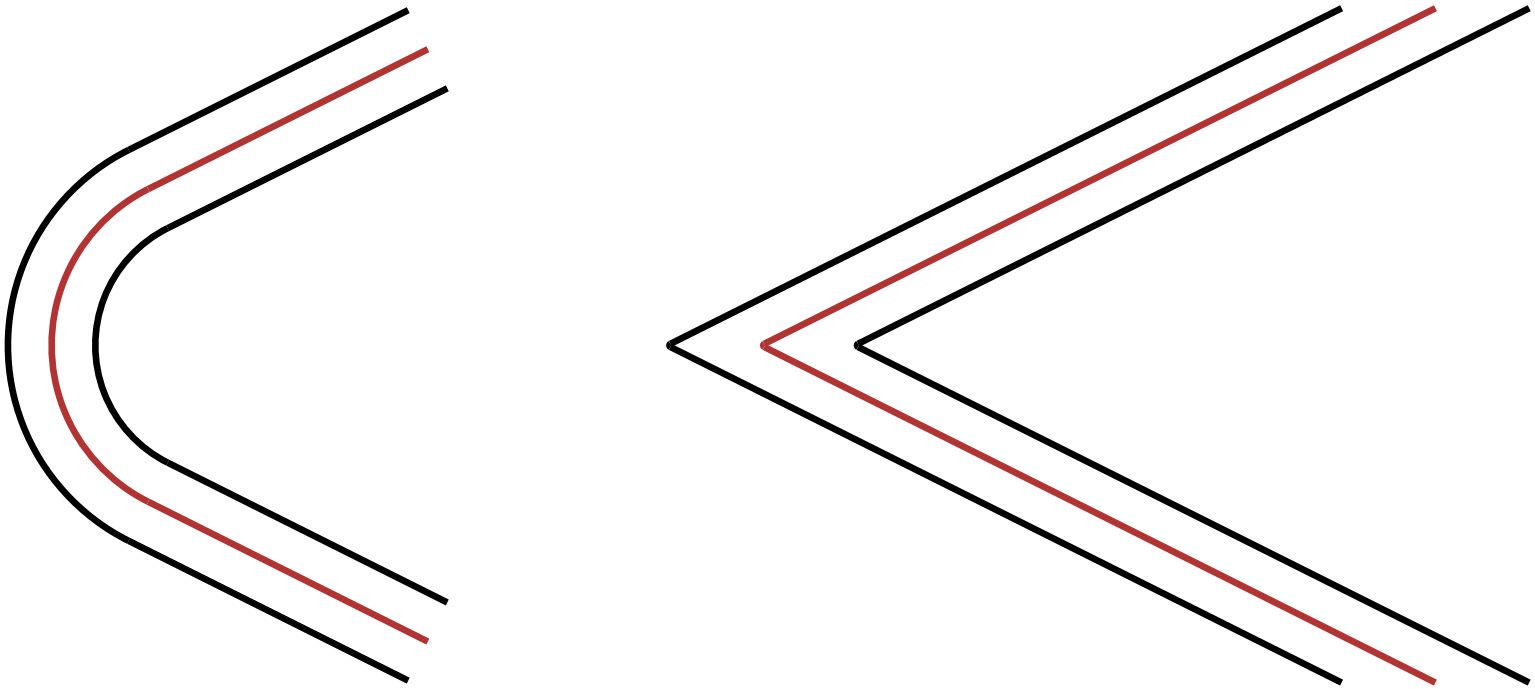
1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

Qu'est-ce qu'un guide d'onde ?



Un résultat de Duclos et Exner

Un fait remarquable prouvé par Duclos et Exner (voir les diverses généralisations par Chenaud, Duclos, Freitas, Krejčiřík, Kříž, etc.) est que le Laplacien de Dirichlet sur Ω_ε possède toujours du spectre discret sous son spectre essentiel, sous réserve que le guide soit courbé et droit à l'infini.
Dans la limite $\varepsilon \to 0$, ils montrent même la convergence de l'opérateur, dans un certain sens, vers un opérateur effectif

$$\mathcal{L}^{\mathrm{eff}} = -\partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \qquad \text{sur} \qquad \mathrm{L}^2(c, \mathrm{d}s).$$

Retour sur le guide à coin Ω_θ

Plane waveguides with corners in the small angle limit
Journal of Mathematical Physics (2012)
avec M. Dauge

Retour sur le guide à coin Ω_θ

On pose $h = \tan\theta$; après normalisation, on obtient le nouvel opérateur :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Gui}}(h) = -h^2\partial_x^2 - \partial_y^2,$$

avec domaine :

$$\mathrm{Dom}\left(\mathcal{L}_{\mathrm{Gui}}(h)\right) = \left\{\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega_{\frac{\pi}{4}}) : \quad \mathcal{L}_{\mathrm{Gui}}(h)\psi \in \mathrm{L}^2(\Omega_{\frac{\pi}{4}})\right\}.$$

Limite $h \to 0$ du guide à coin

Théorème

Pour tout N_0, il existe $h_0 > 0$, tel que pour tout $h \in (0, h_0)$ les N_0 premières valeurs propres de $\mathcal{L}_{\mathrm{Gui}}(h)$ existent. Ces valeurs propres jouissent des développements asymptotiques suivants :

$$\lambda_{\mathrm{Gui},n}(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j\geq 0} \lambda_{n,j} h^{j/3}$$

avec $\lambda_{n,0} = \frac{1}{8}$, $\lambda_{n,1} = 0$ et $\lambda_{n,2} = (4\pi\sqrt{2})^{-2/3} z_{\mathrm{Ai}^{\mathrm{rev}}}(n)$. Les fonctions propres correspondantes admettent des développements en puissances de $h^{1/3}$, sur deux échelles h et $h^{2/3}$.

- Thèse de Thomas Ourmières-Bonafos.

Spectral asymptotics of a broken delta interaction
J. Phys. A : Math. Theor. (2014)
avec V. Duchêne

On étudie une δ-interaction supportée sur une ligne brisée :

$$\mathfrak{H}_h = -h^2\partial_x^2 - \partial_y^2 - \delta_{\Sigma_{\frac{\pi}{4}}}$$

et on compte le nombre de valeurs propres quand la brisure est importante :

$$\mathrm{N}\left(\mathfrak{H}_h, -\frac{1}{4} - C(h)\right) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{\pi h}\int_0^{+\infty}\sqrt{-\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}W(xe^{-x})\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

avec $C(h) \geq M_0 h$ et $C(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

Effet de la torsion

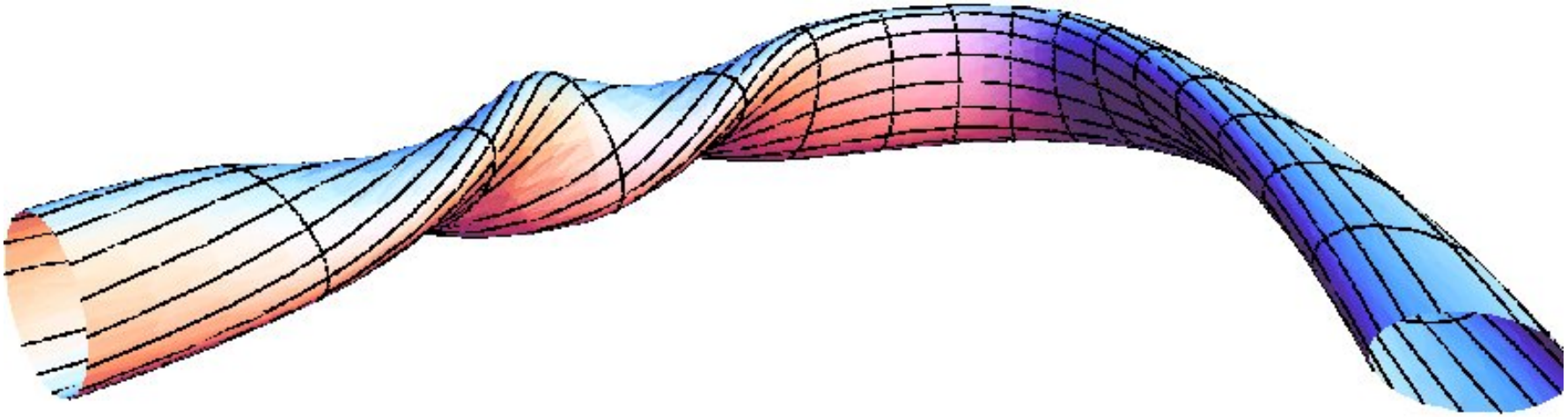


FIGURE – Torsion à gauche et courbure à droite

Magnetic effects in curved quantum waveguides
Annales Henri Poincaré (2014)
avec D. Krejčiřík

The magnetic Laplacian in shrinking tubular neighbourhoods of hypersurfaces
Journal of Geometric Analysis (2014)
avec D. Krejčiřík et M. Tušek

- Limite $\varepsilon \to 0$, en fonction de l'intensité du champ magnétique, convergence vers un opérateur effectif par convergence de la résolvante.
- Inégalités de Hardy magnétiques.

Breaking a magnetic zero locus : model operators and numerical approach
ZAMM (2013)
avec V. Bonnaillie-Noël
▶ Étude d'une famille d'opérateurs modèles pour des champs magnétiques qui s'annulent en présence d'un bord.

Breaking a magnetic zero locus : asymptotic analysis
Math. Models Methods Appl. (2014)
▶ Approximation de Born-Oppenheimer magnétique, états cohérents (voir plus loin).

▶ Thèse de Jean-Philippe Miqueu.

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

From the Laplacian with variable magnetic field to the electric Laplacian in the semiclassical limit
Analysis and PDE (2013)

Semiclassical analysis with vanishing magnetic fields
Journal of Spectral Theory (2013)
avec N. Dombrowski

Théorème

Pour tout $n \geq 1$, *il existe une suite* $(\lambda_{n,j})_{j\geq 0}$ *telle que*

$$\lambda_n(\hbar) \underset{\hbar\to 0}{\sim} \hbar^{4/3} \sum_{j\geq 0} \lambda_{n,j} \hbar^{j/6}$$

où

$$\lambda_{n,0} = \gamma_0^{2/3} \nu_1^{[1]}(\zeta_0^{[1]}), \quad \lambda_{n,1} = 0,$$

et

$$\lambda_{n,2} = \gamma_0^{2/3} C_0 + \gamma_0^{2/3}(2n-1)\left(\frac{\alpha \nu_1^{[1]}(\zeta_0)(\nu_1^{[1]})''(\zeta_0^{[1]})}{3}\right)^{1/2},$$

où l'on a posé

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma_0^{-1}\gamma''(0) > 0.$$

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

Semiclassical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field : a toy model
Comm. PDE. (2012)

Le domaine géométrique est le suivant

$$\Omega_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq x_0, |y| \leq y_0 \text{ and } 0 < z \leq z_0\},$$

avec $x_0, y_0, z_0 > 0$. La partie du bord qui porte la condition de Dirichlet est

$$\partial_{\text{Dir}}\Omega_0 = \{(x, y, z) \in \Omega_0 : |x| = x_0 \text{ ou } |y| = y_0 \text{ ou } z = z_0\}.$$

La dernière face porte la condition de Neumann ($z = 0$).
Pour $\hbar > 0$, $\alpha > 0$ et $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on considère l'opérateur (avec les conditions au bord précédentes)

$$\mathfrak{L}_\hbar = \hbar^2 D_y^2 + \hbar^2 D_z^2 + (\hbar D_x + z\cos\theta - y\sin\theta + \alpha z(x^2 + y^2))^2.$$

Théorème

Pour tout $\alpha > 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *et* $n \geq 1$, *il existe une suite* $(\lambda_{n,j})_{j\geq 0}$ *et* $\varepsilon_0 > 0$ *tels que si* $|x_0| + |y_0| + |z_0| \leq \varepsilon_0$, *alors*

$$\lambda_n(\hbar) \sim \hbar \sum_{j\geq 0} \lambda_{n,j} \hbar^j$$

et on a $\lambda_{n,0} = \mathfrak{s}_1(\theta)$ *et* $\lambda_{n,1}$ *est la* n*-ième valeur propre d'un oscillateur harmonique en dimension un induit par la combinaison des variations du champ magnétique et de la fonction spectrale* $\mathfrak{s}_1$.

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

When the 3D magnetic Laplacian meets a curved edge in the semiclassical limit
SIAM J. Math. Anal. (2013)
avec N. Popoff

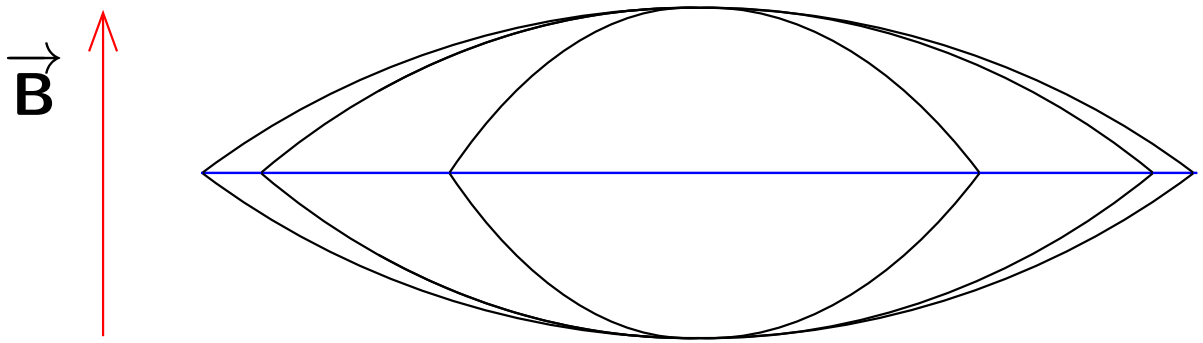


FIGURE – Lentille d'ouverture constante dans un champ uniforme.

Théorème

Pour tout $n \geq 1$ *il existe* $(\lambda_{n,j})_{j\geq 0}$ *tel que*

$$\lambda_n(\hbar) \underset{\hbar\to 0}{\sim} \hbar \sum_{j\geq 0} \lambda_{n,j} \hbar^{j/4}.$$

De plus, on a

$$\lambda_{n,0} = \nu_1^{\mathrm{e}}(\alpha_0), \quad \lambda_{n,1} = 0,$$

$$\lambda_{n,2} = \omega_0 + (2n-1)\sqrt{\kappa \mathcal{T}_0^{-1} \| D_{\hat{z}} u^{\mathrm{e}}_{\zeta_0^{\mathrm{e}}} \|^2 \partial_\zeta^2 \nu_1^{\mathrm{e}}(\alpha_0, \zeta_0^{\mathrm{e}})},$$

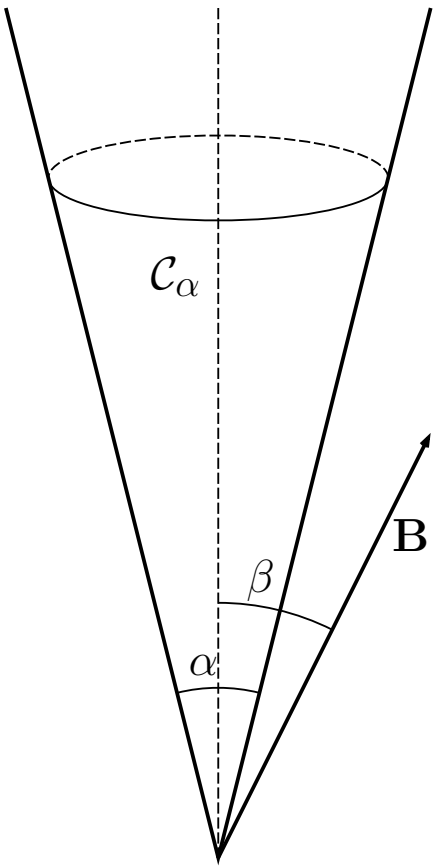
où ω_0, $\mathcal{T}_0$ *et* κ *sont des constantes géométriques et où les autres quantités sont liées à l'opérateur de Popoff.*

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples



Peak power in the 3D magnetic Schrödinger equation
J. Funct. Anal. (2013)
avec V. Bonnaillie-Noël

Magnetic Neumann Laplacian on a sharp cone
Calc. Var. (2014)
avec V. Bonnaillie-Noël

Théorème

Pour tout $n \geq 1$, *il existe* $\alpha_0(n) > 0$ *et une suite* $(\lambda_{n,j})_{j\geq 0}$ *telle que pour tout* $\alpha \in (0, \alpha_0(n))$, *la n-ième valeur propre existe et satisfait*

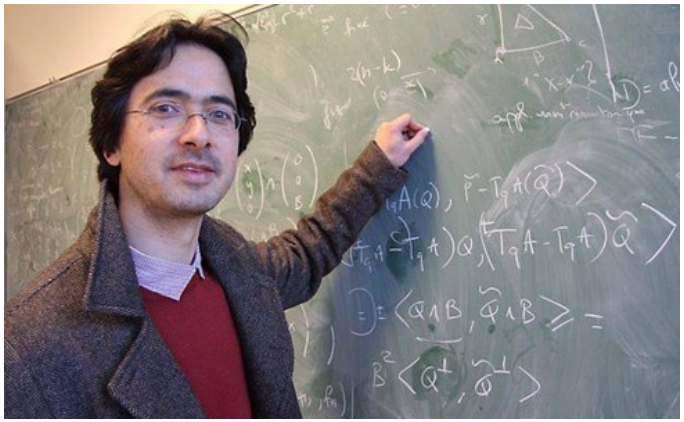
$$\lambda_n(\alpha, \beta) \underset{\alpha \to 0}{\sim} \alpha \sum_{j \geq 0} \lambda_{n,j} \alpha^j, \qquad \textit{avec} \quad \lambda_{n,0} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \beta}}{2^{5/2}}(4n - 1).$$

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples



Geometry and Spectrum in 2D Magnetic Wells
Annales de l'Institut Fourier (2014)
avec S. Vũ Ngọc

Nous examinons ici $\mathcal{L}_\hbar = (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Son symbole est

$$H(q,p) = \|p - \mathbf{A}(q_1,q_2)\|^2 = (p_1 - A_1(q_1,q_2))^2 + (p_2 - A_2(q_1,q_2))^2.$$

La variété caractéristique de H est

$$\Sigma = \{(q,p) \in \mathbb{R}^4 : p_1 = A_1(q_1,q_2), \quad p_2 = A_2(q_1,q_2)\}.$$

Théorème

Pour h assez petit il existe un opérateur intégral de Fourier $U_\hbar$ tel que

$$U_\hbar^* U_\hbar = I + Z_\hbar, \qquad U_\hbar U_\hbar^* = I + Z'_\hbar,$$

où $Z_\hbar, Z'_\hbar$ sont des pseudors qui s'annulent microlocalement dans un voisinage de $\tilde{\Omega} \cap \Sigma$ et tels que

$$U_\hbar^* \mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}} U_\hbar = \mathcal{L}_\hbar^{\mathrm{No}} + R_\hbar,$$

- *$\mathcal{L}_\hbar^{\mathrm{No}}$ est un pseudor qui appartient à $S(m)$ qui commute avec*

$$\mathcal{I}_\hbar := -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^2,$$

- *$\mathcal{L}_\hbar^{\mathrm{No}} = \mathcal{H}_\hbar^0 + Q_\hbar$, où $\mathcal{H}_\hbar^0 = \mathrm{Op}_\hbar^w(H^0)$, $H^0 = B(\varphi^{-1}(z_2))|z_1|^2$, et $Q_\hbar$ commute avec $\mathcal{I}_\hbar$ et est relativement borné par rapport à $\mathcal{H}_\hbar^0$ avec borne relative aussi petite qu'on veut.*

On retrouve un résultat de Helffer et Kordyukov en observant de plus qu'il n'y a pas de puissances impaires de $\hbar^{1/2}$ dans le développement des valeurs propres (voir aussi une autre contribution des mêmes auteurs où ils utilisent la méthode de Grushin).

Corollaire

Si B a un unique minimum non dégénéré, alors il existe une constante c_0 telle que pour tout n, la valeur propre $\lambda_n(\hbar)$ admet un développement complet en puissances de $\hbar$ de la forme

$$\lambda_n(\hbar) = \hbar \min B + \hbar^2(c_1(2n-1) + c_0) + \mathcal{O}(\hbar^3).$$

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

Magnetic WKB constructions
avec V. Bonnaillie-Noël et F. Hérau

Nous analysons les opérateurs auto-adjoints sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^m_s \times \mathbb{R}^n_t, \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t)$ de la forme suivante

$$\mathfrak{L}_h = (hD_s + A_1(s,t))^2 + (D_t + A_2(s,t))^2,$$

où A_1 et A_2 sont des polynômes.

On introduit le symbole opérateur de $\mathfrak{L}_h$. Pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, on considère le Laplacien électo-magnétique suivant, sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}t)$:

$$\mathcal{M}_{x,\xi} = (D_t + A_2(x, t))^2 + (\xi + A_1(x, t))^2.$$

Si $\mu(x, \xi)$ désigne sa plus petite valeur propre, on aimerait remplacer $\mathfrak{L}_h$ par le pseudor

$$\mu(s, hD_s).$$

Hypothèses

Nous supposons que $\mu(x, \xi)$ est une valeur propre simple, que la famille de symbole opérateurs $(\mathcal{M}_{x,\xi})_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m}$ est analytique et que μ admet un unique minimum non dégénéré en (x_0, ξ_0). Nous travaillons aussi sous l'hypothèse que le spectre de Hess $\mu(x_0, \xi_0)(\sigma, D_\sigma)$ est simple et que le bas du spectre essentiel du Laplacien magnétique est suffisamment grand.

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

Théorème

On se place sous nos hypothèses. Pour tout $n \geq 1$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in (0, h_0)$ la n-ième valeur propre de $\mathfrak{L}_h$ existe et vérifie

$$\lambda_n(h) = \lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} h + \mathcal{O}(h^{3/2}),$$

où $\lambda_{n,0} = \mu_0$ and $\lambda_{n,1}$ est la n-ième valeur propre de $\frac{1}{2}\mathrm{Hess}_{x_0,\xi_0}\, \mu(\sigma, D_\sigma)$.

Idées : estimées pseudo-différentielles grossières liées aux estimées d'Agmon-Persson, états cohérents, généralisation de la formule « IMS ».

1 Ce qui fait penser
- Motivations et questions
- La Clef des Champs, dix ans après
- Kaléidoscope

2 Le magnétisme des guides d'ondes
- Un guide d'onde électrique
- Quand cassent les guides d'ondes
- Les guides d'ondes se magnétisent

3 Variations magnétiques
- L'annulation des champs
- Un piège sur un bord régulier
- L'attraction des arêtes
- Le pouvoir des pointes
- Magnétisme symplectique

4 L'approximation de Born-Oppenheimer magnétique
- Simplicité asymptotique
- Approximation BKW et exemples

On suppose que $A_2 = 0$ et donc, on a

$$\mathfrak{L}_h = D_t^2 + (hD_s + A_1(s,t))^2.$$

Théorème

Sous nos hypothèses, il existe une fonction $\Phi = \Phi(s)$ *définie dans un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* x_0 *avec* $\mathrm{Re}\,\mathrm{Hess}\Phi(x_0) > 0$ *et, pour tout* $n \geq 1$, *une suite de réels* $(\lambda_{n,j})_{j\geq 0}$ *telle que*

$$\lambda_n(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j\geq 0} \lambda_{n,j} h^j,$$

avec $\lambda_{n,0} = \mu_0$. *De plus , il existe une série formelle de fonctions régulières sur* $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^n_t$,

$$a_n(.;h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j\geq 0} a_{n,j} h^j, \quad \text{avec } a_{n,0} \neq 0 \text{ tel que}$$

$$(\mathfrak{L}_h - \lambda_n(h)) \left(a_n(.;h) e^{-\Phi/h} \right) = \mathcal{O}\left(h^\infty\right) e^{-\Phi/h}.$$

En outre, il existe $c_0 > 0$ *tel que pour tout* $h \in (0, h_0)$

$$\mathcal{B}\Big(\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} h, c_0 h\Big) \cap \mathrm{sp}\left(\mathfrak{L}_h\right) = \{\lambda_n(h)\}.$$

Inspiration nordique de Mikael et Søren...

Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère l'opérateur sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}\mathsf{s}\,\mathrm{d}\mathsf{t})$

$$\mathcal{L}_{\hbar}^{[k],\mathrm{gM}} = \hbar^2 D_{\mathsf{t}}^2 + \left(\hbar D_{\mathsf{s}} - \gamma(\mathsf{s})\frac{\mathsf{t}^{k+1}}{k+1}\right)^2,$$

où γ ne s'annule pas. On pose :

$$\mathsf{s} = s, \qquad \mathsf{t} = \hbar^{\frac{1}{k+2}} t = ht.$$

États magnétiques induits par la courbure

Rappelons l'asymptotique montrée par Fournais et Helffer :

$$\lambda^{c}_{n,\hbar} = \Theta_0 \hbar - C_1 \kappa_{\max} \hbar^{3/2} + (2n-1) C_1 \Theta_0^{1/4} \sqrt{\frac{3k_2}{2}} \hbar^{7/4} + o(\hbar^{7/4}),$$

où $k_2 = -\kappa''(0)$. L'hypothèse générique est ici la suivante :

Hypothèse

La fonction régulière κ admet un unique maximum non dégénéré en 0.

États magnétiques induits par la courbure

Théorème

Il existe une fonction

$$\Phi = \Phi(\sigma) = \left(\frac{2C_1}{\nu''(\zeta_0)}\right)^{1/2} \left| \int_0^\sigma (\kappa(0) - \kappa(\varsigma))^{1/2} \, \mathrm{d}\varsigma \right|$$

définie dans un voisinage de $\mathcal{V}$ *of* $(0,0)$ *telle que* $\operatorname{Re}\Phi''(0) > 0$, *et une suite de réels* $(\lambda^{\mathrm{c}}_{n,j})_{j\geq 0}$ *telle que*

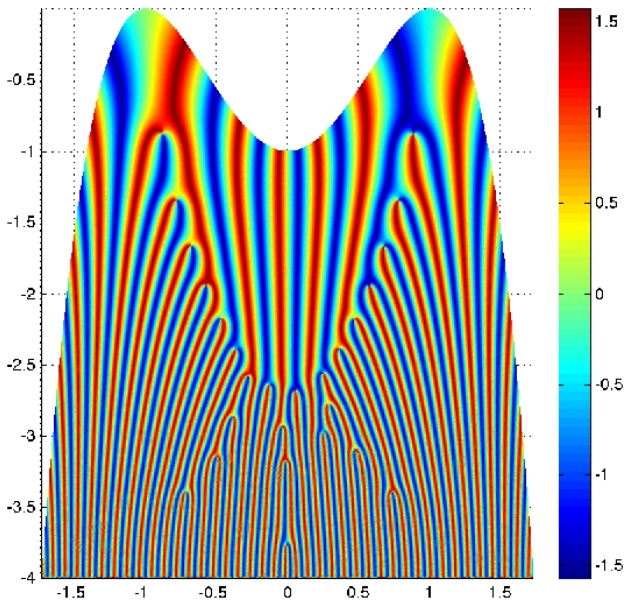
$$\lambda^{\mathrm{c}}_n(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j\geq 0} \lambda^{\mathrm{c}}_{n,j} h^j.$$

De plus, il existe une série formelle de fonctions $a^{\mathrm{c}}_n(h)$ *sur* $\mathcal{V}$, *telle que*

$$\left(\mathfrak{L}^{\mathrm{c}}_h - \lambda^{\mathrm{c}}_n(h)\right)\left(a^{\mathrm{c}}_n(h) e^{-\Phi/h}\right) = \mathcal{O}\left(h^\infty\right) e^{-\Phi/h}.$$

Back to the future

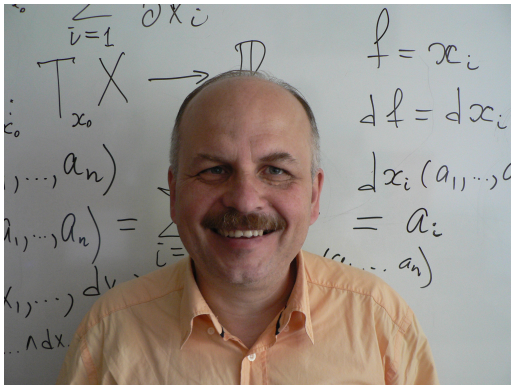
Spectral asymptotics of the Dirichlet Laplacian in a conical layer
avec M. Dauge et T. Ourmières-Bonafos



Magnetic Agmon's estimates and tunnel effect

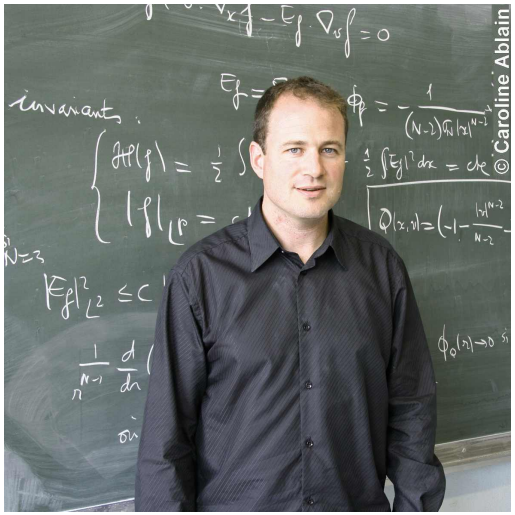
avec V. Bonnaillie-Noël et F. Hérau

Band functions in presence of magnetic steps
avec P. Hislop, M. Persson et N. Popoff



Semiclassical magnetic Hamiltonians in dimension three

avec B. Helffer, Y. Kordyukov et S. Vũ Ngọc



Cubic NLS equation in shrinking bidimensional waveguides
avec F. Méhats

Optimal magnetic Sobolev constants in the semiclassical limit

avec S. Fournais

Around some convex optimization problems occurring in biostatistics
avec V. Guillemot

♫ ♪ ♫

Generalizations of "QR" algorithms for Hilbert-Schmidt operators

avec B. Boutin

(mais aussi, Dolly de G. Fauré, Op. 56, Berceuse, quatre mains)

Merci à tous !

Si on me presse de dire pourquoy je l'aymois, je sens que cela ne se peut exprimer qu'en respondant : Par ce que c'estoit lui : par ce que c'estoit moy. Il y a, au delà de tout mon discours et de ce que j'en puis dire particulierement, ne sçay quelle force inexplicable et fatale, médiatrice de cette union. Nous nous cherchions avant que de nous estre veus [...] : nous nous embrassions par nos noms.

Montaigne
(au sujet d'un irrésistible magnétisme)