Exercices sur la densité

Nicolas Raymond

6 février 2011

1 $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable, Brézis, p. 66

Lemme 1.1 *Soit E un Banach. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts non vides et deux à deux disjoints et telle que I ne soit pas dénombrable. Alors, E n'est pas séparable.*

Preuve.
Le raisonnement se fait par l'absurde. Soit (u_n) une suite dense de E. Pour tout $i \in I$, on a

$$O_i \cap \{u_n\} \neq \emptyset.$$

Pour tout $i \in I$, il existe un entier $n(i)$ telle que $u_{n(i)} \in O_i$ Ainsi, il existe une application (injective) $i \mapsto n(i)$ et on en déduit que I est dénombrable.

∎

Montrons alors que $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable. Pour tout $a \in \Omega$, il existe $r_a > 0$, $B(a, r_a) \subset \Omega$. On note $u_a = \mathbb{1}_{B(a,r_a)}$ et on considère la boule ouverte :

$$O_a = \{f \in L^\infty : \|f - u_a\|_\infty < \frac{1}{2}\}.$$

O_a est un ouvert non vide et les O_a sont deux à deux disjoints.

2 Lemme fondamental des distributions (adaptation du Brézis)

Lemme 2.1 *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On suppose que pour tout $u \in \mathcal{C}^0_0(\Omega)$:*

$$\int_\Omega fu = 0.$$

Alors, on a : $f = 0$ p.p.

Preuve.
On suppose dans un premier temps que Ω est borné et donc que $f \in L^1(\Omega)$.
Il existe $f^\epsilon \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ telle que :

$$\|f - f^\epsilon\|_{L^1} \leq \epsilon.$$

On en déduit avec l'hypothèse que, pour tout $u \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$:

$$\left|\int f^\epsilon u\right| \leq \epsilon \|u\|_{L^\infty}.$$

Nous voulons prendre pour u le signe de f^ϵ, c'est pourquoi nous introduisons :

$$\sigma_\eta(f^\epsilon) = \frac{f^\epsilon}{\sqrt{(f^\epsilon)^2 + \eta^2}}.$$

Nous trouvons donc :

$$\int \frac{(f^\epsilon)^2}{\sqrt{(f^\epsilon)^2 + \eta^2}} \leq |\Omega|\epsilon.$$

On applique le théorème de convergence dominée pour faire tendre η vers 0 :

$$\int |f^\epsilon| \leq |\Omega|\epsilon.$$

On en tire :

$$\int |f| \leq (|\Omega| + 1)\epsilon$$

et on fait tendre ϵ vers 0.
Quand Ω n'est pas borné, il suffit de prendre une suite exhaustive de compacts.

■

3 Inégalité de Poincaré, Hirsch-Lacombe, p. 307

Soit Ω un ouvert borné dans une direction (par exemple $\Omega \subset [A, B] \times \mathbb{R}^{d-1}$).
On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.
Montrons que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\| \leq (B - A)\|\nabla u\|.$$

Nous allons déjà supposer que $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Ainsi, pour $x \in \Omega$, on écrit (on prolonge u par 0 hors de Ω) :

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_d) - u(A, x_2, \cdots, x_d) = \int_A^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_d) dt.$$

Par Cauchy-Scwharz, on a :

$$|u(x)|^2 \leq (B-A)\int_A^B \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_d)\right|^2 dt.$$

Il ne reste alors qu'à intégrer sur Ω.

Complétude de $H^1(\Omega)$ On munit $H^1(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2.$$

Soit u_n une suite de Cauchy pour cette norme. Alors (u_n) et (∇u_n) sont de Cauchy pour la norme L^2. Par complétude de L^2, il existe deux fonctions u et v de L^2 telles que : $u_n \underset{L^2}{\rightarrow} u$ et $\nabla u_n \underset{L^2}{\rightarrow} v$. Cela entraîne la convergence au sens des distributions $u_n \underset{\mathcal{D}'}{\rightarrow} u$ et $\nabla u_n \underset{\mathcal{D}'}{\rightarrow} v$. Mais, au sens des distributions, on a : $\nabla u_n \underset{\mathcal{D}'}{\rightarrow} \nabla u$. Les deux distributions v et ∇u coïncident et donc $\nabla u \in L^2$ et la conclusion s'ensuit.