Exercices sur les distributions

Nicolas Raymond

23 février 2011

1 Mesure de surface d'un ouvert régulier

On fixe une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty$. Soit Ω l'ouvert défini par

$$\Omega = \{\rho < 0\}.$$

On suppose que $\partial\Omega = \{\rho = 0\}$ et que $\nabla\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$. La direction de $\nabla\rho$ ne dépend pas de ρ ; de plus, $\frac{\nabla\rho}{\|\nabla\rho\|}$ désigne la normale extérieure.

Dérivée normale d'une indicatrice On introduit la distribution suivante :

$$T = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial\rho}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{1}_\Omega.$$

On remarque que T est bien définie car le produit d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ par une distribution est bien défini.
Vérifions que son support est contenu dans $\partial\Omega$. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ dont le support ne rencontre pas $\partial\Omega$. On calcule $\langle T, \phi \rangle$. On a :

$$\langle T, \phi \rangle = \int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_j} \phi \right) dx.$$

Or, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_j} \phi \right) dx = 0.$$

Approximation de l'indicatrice Soit χ une fonction régulière telle que $\chi(t) = 1$ pour $t \in]-\infty, -1]$ et $\chi(t) = 0$ pour $t \geq 1$. On pose :

$$\chi_\epsilon(x) = \chi\left(\epsilon^{-1}\rho(x)\right).$$

On remarque déjà que χ_ϵ tend vers $\mathbb{1}_\Omega$ au sens des distributions quand ϵ tend vers 0. On a :

$$\langle \chi_\epsilon, \phi \rangle = \int_\Omega \chi_\epsilon \phi \, dx.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence dominée. Cela nous fournit une approximation de T ; on pose en effet :

$$T_\epsilon = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_\epsilon.$$

On calcule :

$$\langle T_\epsilon, \phi \rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle \chi_\epsilon, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \phi \right) \rangle \to \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \phi \right) dx = \langle T, \phi \rangle,$$

par convergence dominée.

T est positive On écrit T_ϵ plus explicitement :

$$T_\epsilon = -\epsilon^{-1} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \chi'(\epsilon^{-1}\rho) = -\epsilon^{-1} |\nabla \rho|^2 \chi'(\epsilon^{-1}\rho).$$

T_ϵ est donc positive et ainsi T aussi. Il est aisé de montrer qu'une distribution positive est d'ordre 0 et se prolonge de façon unique en une mesure (positive).

Calcul de $-\partial_j \mathbb{1}_\Omega$ Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$. On a :

$$\begin{aligned} &- \langle \partial_j \mathbb{1}_\Omega, \phi \rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} \langle \partial_j (\chi_\epsilon), \phi \rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} \langle \epsilon^{-1} \partial_j \rho \chi'(\epsilon^{-1}\rho), \phi \rangle \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \langle \epsilon^{-1} |\nabla \rho|^2 \chi'(\epsilon^{-1}\rho), |\nabla \rho|^{-2} \partial_j \rho \phi \rangle = \langle T, |\nabla \rho|^{-2} \partial_j \rho \phi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré :

$$-\partial_j \mathbb{1}_\Omega = |\nabla \rho|^{-2} \partial_j \rho \, T = n_j \|\nabla \rho\|^{-1} T = n_j d\sigma.$$

Formule de Green-Riemann On a, pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_\Omega f \partial_j \phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_\Omega f \partial_j \phi \, dx = \langle \mathbb{1}_\Omega, \partial_j (f\phi) - \partial_j f \, \phi \rangle = -\langle \partial_j (\mathbb{1}_\Omega), f\phi \rangle - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j f \phi \, dx.$$

On en déduit la fameuse formule :

$$\int_\Omega f \partial_j \phi \, dx = -\int_\Omega \partial_j f \phi \, dx + \int_{\partial \Omega} f \phi \, n_j d\sigma.$$

On peut vérifier que $\mathcal{C}^1$ suffit.

2 Solutions élémentaires du Laplacien

Cas $d = 1$ Vérifions que $E(x) = \frac{1}{2}|x|$ est une solution élémentaire. On a :

$$E' = \frac{1}{2}(H(x) - H(-x))$$

et en dérivant une fois de plus :

$$E'' = \delta_0.$$

Cas $d \geq 2$ On va chercher des solutions élémentaires F radiales : $\Delta F = \delta_0$. Autrement dit, il existe f telle que : $F(x) = f(\|x\|)$. Supposons que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*)$. Alors, c'est un calcul élémentaire qui donne :

$$\Delta F(x) = g(\|x\|),$$

où, pour $r > 0$:

$$g(r) = f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r).$$

Une solution élémentaire radiale $F(x) = f(\|x\|)$ vérifie donc, pour $r > 0$:

$$f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) = 0.$$

Pour $d = 2$, on trouve :

$$f(r) = C \ln(r) + D$$

et pout $d \geq 3$:

$$f(r) = \frac{C}{r^{d-2}} + D.$$

Pour $d = 2$, on va donc considérer $E_2(x) = \ln(\|x\|)$ et pour $d \geq 3$, on considère : $E_d(x) = \frac{1}{\|x\|^{d-2}}$. Ces fonctions sont localement intégrables (passer en coordonnées sphériques) ; elles définissent donc des distributions. Elles vérifient de plus par construction :

$$\Delta (E_d)_{|\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} = 0.$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\langle \Delta E_d, \phi \rangle = \langle E_d, \Delta \phi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega_\epsilon} E_d \Delta \phi \, dx,$$

où : $\Omega_\epsilon = \mathbb{R}^d \setminus B(0, \epsilon)$. On peut utiliser la formule de Green pour le Laplacien :

$$\int_{\Omega_\epsilon} E_d \Delta \phi \, dx = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta E_d \phi \, dx + \int_{\partial \Omega_\epsilon} \left(E_d \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \phi \frac{\partial E_d}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

On a ici
$$\nu = -\frac{x}{\epsilon}.$$
On en déduit que :
$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x)\right| \leq \|\nabla \phi\|.$$
Pour $d \geq 3$, on déduit que :
$$\left|E_d \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x)\right| \leq M\epsilon^{2-d}$$
et pour $d = 2$:
$$\left|E_d \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x)\right| \leq M \ln(\epsilon).$$
De plus, on a :
$$|S(0,\epsilon)| = \epsilon^{d-1}|S(0,1)|.$$
Ainsi, dans tous les cas on tire :
$$\left|\int_{\partial \Omega_\epsilon} E_d \frac{\partial \phi}{\partial \nu} d\sigma\right| \to 0.$$
Traitons l'autre morceau de l'intégrale. On a déjà, pour $d \geq 3$:
$$-\frac{\partial E_d}{\partial \nu} = -\frac{d-2}{\|x\|^{d-1}} \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{x}{\epsilon} = -\frac{d-2}{\epsilon^{d-1}},$$
tandis que pour $d = 2$:
$$-\frac{\partial E_2}{\partial \nu} = \frac{1}{\epsilon}.$$
On a donc montré que, pour $d = 2$:
$$\int_{\partial \Omega_\epsilon} -\phi \frac{\partial E_d}{\partial \nu} d\sigma = \frac{1}{\epsilon} \int_{S(0,\epsilon)} \phi d\sigma$$
et pour $d \geq 3$:
$$\int_{\partial \Omega_\epsilon} -\phi \frac{\partial E_d}{\partial \nu} d\sigma = -\frac{d-2}{\epsilon^{d-1}} \int_{S(0,\epsilon)} \phi d\sigma.$$
Il suffit de faire tendre ϵ vers 0 pour voir qu'on a trouvé des solutions élémentaires.

3 Quelques exercices

Distributions ? Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Les expressions suivantes définissent-elles des distributions sur $\mathbb{R}$? Si oui, en donner une expression simple.

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x^2)dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \phi'(x)e^{x^2}dx, \quad \int_0^\pi \phi'(x)\cos(x)dx.$$

Valeur principale Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. On note :

$$I_\epsilon = \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx.$$

Montrer que I_ϵ possède une limite quand $\epsilon \to 0$. On note $vp\left(\frac{1}{x}\right)(\phi)$ cette limite. Montrer qu'il s'agit d'une distribution et que :

$$\ln(|x|)' = vp\left(\frac{1}{x}\right), \quad xvp\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Fonctions harmoniques On suppose que $d \geq 2$. Soit $B = B(0,1)$. Supposons que u soit harmonique sur $B \setminus \{0\}$ et bornée sur B. On va montrer que u est harmonique sur B.
Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$ valant 1 près de 0. Montrer que :

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = \int_B u(x)\Delta(\phi\chi_\epsilon)(x)dx.$$

Conclure quand $d \geq 3$. Pour le cas $d = 2$, utiliser des fonctions tests telles que $\phi(0) = 0$ et écrire :

$$\phi(x) = x_1\theta_1(x) + x_2\theta_2(x)$$

pour prouver l'existence de c telle que $\Delta u = c\delta_0$. Considérer ensuite $u - cE_2$. Que dire du cas $d = 1$?

4 Constante optimale dans l'inégalité de Poincaré

On se place sur $H_0^1(0,1)$. On introduit :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{\psi \in H_0^1(0,1) \\ \psi \neq 0}} \frac{\int_0^1 |\psi'|^2 dx}{\int_0^1 |\psi|^2 dx}.$$

Il est facile de voir que :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{\psi \in H_0^1(0,1) \\ \|\psi\|_2 = 1}} \int_0^1 |\psi'|^2 dx.$$

Lemme 4.1 *Pour $\psi \in H_0^1(0,1)$, on a, pour tout $x, y \in [0,1]$:*

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\|\psi'\|_2$$

et en particulier, pour tout $x \in [0,1]$:

$$|\psi(x)| \leq \|\psi'\|_2.$$

Lemme 4.2 *λ_1 est atteint.*

Preuve.
Soit ψ_n une suite minimisante telle que $\|\psi_n\|_2 = 1$. En particulier (ψ_n') est bornée dans $L^2(0,1)$. Par le lemme précédent, (ψ_n) est équicontinue sur $[0,1]$ et ponctuellement bornée. Le théorème d'Ascoli s'applique et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que ψ_n converge uniformément vers ψ sur $[0,1]$ et donc en norme L^2. On en déduit que $\|\psi\|_2 = 1$. Il se trouve que (ψ_n') est bornée dans L^2, on peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente (vers ϕ) dans L^2 (et donc dans $\mathcal{D}'$). On doit avoir $\phi = \psi'$ par continuité de la dérivation dans les distributions. C'est un résultat classique que

$$\liminf_{n \to +\infty} \|\psi_n'\|_2 \geq \|\psi'\|_2$$

puisque ψ_n' converge faiblement dans L^2 ver ψ'. Par définition de ψ_n, nous déduisons :

$$\lambda_1 \geq \|\psi'\|_2^2$$

où $\psi \in H_0^1(0,1)$ et $\|\psi\|_2 = 1$. Par définition de λ_1, nous devons avoir :

$$\|\psi'\|^2 = \lambda_1.$$

L'infimum est donc atteint.

∎

Lemme 4.3 *Soit ψ qui réalise le minimum. Alors, ψ est solution de l'équation :*

$$-\psi'' = \lambda_1 \psi$$

Preuve.
Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,1))$ et $\epsilon > 0$. On pose :

$$f(\epsilon) = \frac{\int_0^1 |(\psi + \epsilon\phi)'|^2 dx}{\int_0^1 |\psi + \epsilon\phi|^2 dx}.$$

Le caractère minimal de ψ implique que $f'(0) = 0$. Un simple calcul montre que :

$$\int_0^1 \psi'\phi' dx = \lambda_1 \int_0^1 \psi\phi dx.$$

■

Lemme 4.4 *Les valeurs de* λ_1 *donnant lieu à des solutions nulles en* 0 *et en* 1 *mais non identiquement nulles sont exactement les nombres* $n^2\pi^2$ *où* n *est un entier. Ils sont associés aux fonctions* $\sin(n\pi x)$*.*

De ces quatre lemmes, on déduit que $\lambda_1 = \pi^2$ et que le minimum est atteint pour les fonctions $c\sin(\pi x)$ où c décrit $\mathbb{R}^*$.