ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

NICOLAS RAYMOND

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 3
1. Espaces vectoriels normés : rappels 4
1.1. Généralités 4
1.2. Applications linéaires continues 6
1.3. Compacité et conséquences dans les espaces vectoriels normés 8
1.4. Exercices 11
2. Théorèmes de Hahn-Banach : compléments 14
2.1. Théorème de Hahn-Banach analytique 14
2.2. Théorème de Hahn-Banach géométrique 15
2.3. Exercices 18
3. Espaces complets : rappels 19
3.1. Suites de Cauchy, espaces métriques complets, exemple fondamental 19
3.2. Propriétés des espaces complets 21
3.3. Produit d'espaces complets 22
3.4. Espaces de Banach 22
3.5. Applications 23
3.6. Exercices 27
4. Théorie de Baire et applications 30
4.1. Théorème de Baire 30
4.2. Applications élémentaires 30
4.3. Théorème de Banach-Steinhaus 31
4.4. Théorème de l'application ouverte et du graphe fermé 32
4.5. Exercices 35
5. Espaces de Hilbert 37
5.1. Généralités 37
5.2. Applications du théorème de la projection 41
5.3. Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts 45
5.4. Exercices 49

6. Calcul différentiel banachique 54
6.1. Différentielle, propriétés de base 54
6.2. Accroissements finis 58
6.3. Différentielles partielles et d'ordre supérieur 59
6.4. En dimension finie 64
6.5. Problèmes d'extrema 65
6.6. Exercices 68
7. Inversion locale et fonctions implicites 72
7.1. Théorème d'inversion locale 72
7.2. Théorème des fonctions implicites 73
7.3. Application à la géométrie 74
7.4. Exercices 77

INTRODUCTION

L'objet de ce cours est d'introduire la notion de dérivée en toute généralité et d'analyser ses différentes applications. À cette fin, nous allons d'abord rappeler et définir les structures et théorèmes fondamentaux qui permettent de faire de l'analyse (applications linéaires, complétude, compacité, espaces de Hilbert). Ensuite, nous nous consacrerons au calcul différentiel à proprement parler (différentielle, formules de Taylor, extrema, inversion locale et applications à la géométrie).

Quelques références :

(1) Cours de Topologie de L3,
(2) *Analyse fonctionnelle.* H. Brézis,
(3) *Éléments d'analyse fonctionnelle.* F. Hirsch et G. Lacombe,
(4) *Petit guide de calcul différentiel.* F. Rouvière,
(5) *Éléments d'analyse 1.* J. Dieudonné.

1. ESPACES VECTORIELS NORMÉS : RAPPELS

Dans ce chapitre, nous allons étudier les espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On verra qu'il y a une différence fondamentale entre les espaces vectoriels normés de dimension finie et ceux de dimension infinie, ces derniers intervenant la plupart du temps comme espaces de fonctions. Les résultats de ce chapitre portant sur la dimension infinie peuvent être considérés comme les premiers rudiments d'analyse fonctionnelle. Dans tout ce chapitre, on travaillera sur des espaces vectoriels réels ou complexes, i.e. ayant pour corps de base le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. **Généralités.**

1.1.1. *Définitions.* Dans un premier temps, rappelons les définitions de norme et d'espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\ \|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

- **i):** $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ (homogénéité),
- **ii):** $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$,
- **iii):** $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.2. Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\ \|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|\ \|$ est une norme sur E.

Proposition 1.3. *Si $(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé alors $d(x, y) = \|y - x\|$ définit une distance sur E. De plus, la topologie ainsi définie est compatible avec la structure d'espace vectoriel, i.e. les applications*

$$\begin{array}{rcl} E \times E \to E & \quad \textit{et} \quad & \mathbb{K} \times E \to E \\ (x, y) \to x + y & & (\lambda, x) \to \lambda . x \end{array}$$

sont continues.

Démonstration. La continuité des deux applications ci-dessus vient des inégalités :

$$\begin{aligned} & \|(x' + y') - (x + y)\| \le \|x' - x\| + \|y' - y\| \\ \text{et} \quad & \|\lambda' x' - \lambda x\| \le |\lambda' - \lambda|\, \|x'\| + |\lambda|\, \|x' - x\|\,. \end{aligned}$$

□

En remarquant $\|x\| = d(0, x)$, on a aussi immédiatement la proposition suivante :

Proposition 1.4. *La norme $\|\ \|$ est une application 1-Lipschitzienne de $(E, \|\ \|)$ dans $\mathbb{R}_+$:*

$$\forall x, y \in E,\ |\|y\| - \|x\|| \le \|y - x\|\,.$$

On rappelle également l'équivalence (métrique) pour les normes.

Définition 1.5. Deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E,\ C^{-1}\|x\| \le \|x\|' \le C\, \|x\|\,.$$

1.1.2. *Exemples.*

a): Sur $\mathbb{K}^n$ les normes

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \; 1 \le p < \infty, \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i|.$$

sont toutes équivalentes.

b): De même si $(E_i, |\ |_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés alors les quantités définies par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_i|_i,\ i \in \{1,\dots,n\}\}$$

sont des normes sur $\prod_{i=1}^n E_i = \oplus_{i=1}^n E_i$, toutes équivalentes.

c): La quantité $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ définit une norme sur les espaces $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{K})$ (de plus, la borne supérieure est un maximum pour les fonctions continues). C'est la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$.

Plus généralement si $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique compact et si $(E, \|\ \|_E)$ est un espace vectoriel normé alors la quantité définie sur $\mathcal{C}^0(X;E)$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E = \max_{x\in X} \|f(x)\|_E$$

est la norme de la convergence uniforme sur X pour les fonctions à valeurs dans E.

d): Les quantités $\max_{i\in\{1,\dots,k\}} \left\|f^{(i)}\right\|_\infty$ et $\left(\sum_{i=1}^k \left\|f^{(i)}\right\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$, sont des normes équivalentes sur $\mathcal{C}^k([0,1];\mathbb{K})$.

e): La quantité $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{K})$ et n'est pas équivalente à la norme de la convergence uniforme $\|\ \|_\infty$. En effet, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = 1 - (n+1)x$ pour $x \le \frac{1}{2(n+1)}$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \ge \frac{1}{n+1}$.

On a $\|f_n\|_\infty = 1$ tandis que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ de telle sorte que le rapport $\frac{\|\ \|_1}{\|\ \|_\infty}$ n'est pas uniformément minoré.

f): Pour $1 \le p < \infty$ on considère l'espace de suites

$$l^p(\mathbb{N};\mathbb{K}) = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\right\}$$

et pour $p = \infty$ on prend $l^\infty(\mathbb{N};\mathbb{K}) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N};\mathbb{K})$. La quantité $\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ pour $p < \infty$ et pour $p = \infty$ on prend la norme de la convergence uniforme $\|\ \|_\infty$. Pour $p < q$ les espaces $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ et $l^q(\mathbb{N};\mathbb{K})$ sont distincts mais on a $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K}) \subset l^q(\mathbb{N};\mathbb{K})$ et les normes $\|\ \|_p$ et $\|\ \|_q$ sur $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes.

1.2. **Applications linéaires continues.**

Proposition 1.6. *Soit $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement s'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est une application linéaire continue de E dans F, il existe $\rho > 0$ tel que la boule fermée de E, $B_{f,E}(0,\rho)$, soit incluse dans $f^{-1}(B_{f,F}(0,1))$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $\frac{\rho}{\|x\|_E} x$ appartient à $B_{f,E}(0,\rho)$ d'où

$$\frac{\rho}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F = \left\| f\left(\frac{\rho}{\|x\|_E} x \right) \right\|_F \leq 1.$$

Il suffit de prendre $M = \frac{1}{\rho}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si on a la constante M alors on a

$$\forall x, y \in E, \ \|f(y) - f(x)\|_F = \|f(y-x)\|_F \leq M \|y - x\|_E$$

et l'application linéaire f est lipschitzienne. □

Corollaire 1.7. *Toute application linéaire continue $f : E \to F$ est lipschitzienne.*

Une autre conséquence est qu'il n'y a pas de distinction entre équivalence topologique et métrique pour les normes.

Corollaire 1.8. *Deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont métriquement équivalentes.*

Démonstration. Deux normes sont topologiquement équivalentes si l'application Id est bicontinue. Mais comme Id est linéaire cela entraîne qu'elle est bilipschitzienne et donc que les normes sont métriquement équivalentes. □

• *Exemple.* **Exemple d'application linéaire non continue :** Si on munit $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt$ alors la forme linéaire $f \to f(0)$ n'est pas continue. En effet, en prenant la même suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que dans l'exemple e), on a $f_n(0) = 1$ tandis que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$.

Définition 1.9. Les normes $\| \, \|_E$ et $\| \, \|_F$ étant fixées, on note $\mathcal{L}(E;F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On appelle dual topologique de E et on note $E' = \mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires continues sur E.

Proposition 1.10. *La quantité $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$ est une norme sur $\mathcal{L}(E;F)$.*

Démonstration. L'égalité $\|f\| = 0$ entraîne $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$ (et de plus $f(0) = 0$ car f est linéaire). L'homogénéité et l'inégalité triangulaire s'obtiennent facilement :

$$\|\lambda f\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|\lambda f(x)\|_F = |\lambda| \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = |\lambda| \, \|f\|$$

$$\text{et} \quad \|f+g\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)+g(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F + \sup_{\|x\|_E=1} \|g(x)\|_F \leq \|f\| + \|g\| .$$

□

On a des propriétés similaires pour les applications bilinéaires et même multilinéaires (laissé en exercice).

Proposition 1.11. *Si* $(E_1, \| \|_{E1})$, $(E_2, \| \|_{E2})$ *et* $(F, \| \|_F)$ *sont trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés, une application bilinéaire* $\Phi : E_1 \times E2 \to F$ *est continue si et seulement s'il existe une constante* $M > 0$ *telle que*
$$\forall x, y \in E_1 \times E_2,\ \|\Phi(x,y)\|_F \leq M \|x\|_{E1} \|y\|_{E2} .$$

Démonstration. La démonstration est la même que pour le cas linéaire. □

On termine avec une estimation de la norme de la composée de deux applications linéaires continues.

Proposition 1.12. *Si* $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ *et* $(G, \| \|_G)$ *sont trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés alors pour* $f \in \mathcal{L}(E; F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F; G)$ *la composée* $g \circ f$ *appartient à* $\mathcal{L}(E; G)$ *et on a* $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Démonstration. Il est clair que la composée $g \circ f$ est linéaire et continue. De plus, pour $x \in E$ on a :
$$\|g \circ f(x)\|_G = \|g [f(x)]\|_G \leq \|g\| \|f(x)\|_F \leq \|g\| \|f\| \|x\|_E ,$$
d'où la majoration de la norme de $g \circ f$. □

Remarque 1.13. Ce résultat dit en particulier que l'application :$(f, g) \to g \circ f$ est bilinéaire continue de $\mathcal{L}(E; F) \times \mathcal{L}(F; G)$ dans $\mathcal{L}(E; G)$.

Définition 1.14. Si $(\mathcal{A}, +, .\lambda, \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$, on appelle norme d'algèbre toute norme $\| \|$ sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathcal{A}, +, .\lambda)$ qui vérifie
$$\forall A, B \in \mathcal{A},\ \|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\| .$$
On dit alors que $(\mathcal{A}, \| \|)$ est une algèbre normée.

De la Proposition 1.12, on déduit immédiatement

Proposition 1.15. *Si* $(E, \| \|_E)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé alors*$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E; E)$ *muni de la norme* $\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_E$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre normée.*

• *Exemple.* Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toutes les normes ne sont pas des normes d'algèbre. En effet $\|(a_{ij})\|_\infty = \max_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |a_{ij}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mais ne vérifie pas l'inégalité des normes d'algèbre pour $n > 1$: La matrice A qui a des 1 partout a pour norme $\|A\|_\infty = 1$ et on a
$$\left\|A^2\right\|_\infty = \|nA\|_\infty = n > 1 = \|A\|_\infty \|A\|_\infty .$$
En revanche les quantités
$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \max_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$
définissent des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.3. **Compacité et conséquences dans les espaces vectoriels normés.**

1.3.1. *Rappels.*

Définition 1.16. (Borel-Lebesgue) On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$(X = \cup_{i\in I} O_i) \Rightarrow (\exists J \subset I,\ J \text{ fini},\ X = \cup_{i\in J} O_i)\,.$$

Théorème 1.17. *Pour une partie A d'un espace métrique (X, d), les trois assertions sont équivalentes :*

- **i):** *A est compacte.*
- **ii):** *Propriété de Bolzano-Weierstrass : Toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A.*
- **iii):** *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans A.*

1.3.2. *Dimension finie,* $\dim E = n < \infty$. On commence par un petit lemme.

Lemme 1.18. *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si on lui associe la norme*

$$\|x\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|,$$

alors la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est compacte.

Démonstration. L'isomorphisme d'espaces vectoriels : $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \to \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ est un homéomorphisme (et même une isométrie bijective) de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ sur $(E, \|\ \|_\infty)$. On a sait que la boule unité fermée de $\mathbb{K}^n$ est compacte (un produit de compacts est compact et les segments de $\mathbb{K}$ sont compacts), il en est de même de son image $B_f(0, 1) \subset E$. □

Théorème 1.19. *Dans un espace vectoriel de dimension finie E, $\dim E = n < \infty$:*

- **a):** *Toutes les normes sont équivalentes.*
- **b):** *Pour toute norme, les compacts sont les fermés bornés*
- **c):** *Si $(F, \|\ \|_F)$ est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (dimension quelconque), toute application linéaire de E dans F est continue.*

Démonstration. 1) On prend $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et on lui associe la norme $\|\ \|_\infty$ comme dans le Lemme 1.18. Si $\|\ \|$ désigne une autre norme sur E, on a pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|\right) \|x\|_\infty = C\, \|x\|_\infty\,.$$

De plus, cette dernière inégalité dit également que Id est continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $(E, \|\ \|)$. Par conséquent, la norme $\|\ \| : (E, \|\ \|_\infty) \to \mathbb{R}_+$ est continue. Comme la sphère de rayon 1, $S_\infty(0, 1) = \{x \in E,\ \|x\|_\infty = 1\}$ est un compact de $(E, \|\ \|_\infty)$ (partie fermée du compact $B_f(0, 1)$) et comme la fonction continue $\|\ \|$ y est strictement positive, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in S_\infty(0, 1),\ \|x\| \ge \delta.$$

Pour $x \in E$ non nul on a $\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \delta$ et on en déduit

$$\forall x \in E,\ \delta \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C \|x\|_\infty .$$

2) Comme toutes les normes sont (métriquement) équivalentes, les propriétés de compacité et de fermé borné ne dépendent pas de la norme. Or, les compacts de $(E, \| \|_\infty)$ sont les fermés bornés de $(E, \| \|_\infty)$.
c) Si f est une application linéaire de E dans F, on a

$$\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \right\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\| \right) \|x\|_\infty$$

et on conclut avec l'équivalence des normes. □

Remarque 1.20. La première assertion a la conséquence pratique suivante. Quand on veut faire un raisonnement topologique, utiliser la continuité, passer à la limite, ... dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser la norme. On le fait quand vraiment on veut calculer ou majorer très précisément une certaine quantité.

Corollaire 1.21. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues.*

Remarque 1.22. L'exemple 1.2 montre que cela n'est plus vrai en dimension quelconque.

Corollaire 1.23. *En dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé.*

1.3.3. *Dimension infinie.* Soit $(E; \| \|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque. Nous commençons par donner une généralisation du Corollaire 1.23 qui repose sur la compacité en dimension finie.

Proposition 1.24. *Tous sous-espace vectoriel de dimension finie F est un fermé de $(E, \| \|_E)$.*

Démonstration. L'espace vectoriel normé $(F, \| \|_E)$ est de dimension finie. Ses fermés bornés sont donc compacts. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F qui converge dans E, $\lim_{n\to\infty} x_n = l_E \in E$, elle est bornée dans $(E, \| \|_E)$ et donc dans $(F, \| \|_E)$. On peut donc extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans F, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l_F \in F$. Comme E est séparé, on a $l_E = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l_F \in F$ et ce pour tout suite de F ayant une limite l_E dans E. F est fermé. □

Le résultat suivant dit que la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé n'est **jamais compacte en dimension infinie**.

Théorème 1.25. ***(Riesz)*** *Si $(E, \| \|_E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, on a équivalence entre :*

a): *$B_f(0,1)$ est compacte.*

b): *E est de dimension finie.*

Démonstration. a)⇐b) : Déjà fait.
a)⇒b) : On note $B = B_f(0,1)$. La famille $\left(B(x, \frac{1}{2})\right)_{x\in B}$ donne un recouvrement fini d'ouverts de B. Si B est compacte, il existe $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in B$ tels que $B \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2})$. On

note $F = \mathrm{Vect}\,(x_i,\ 1 \leq i \leq n)$ l'espace vectoriel engendré par ces x_i. C'est un sous-espace de dimension finie donc un fermé de E. De plus, l'inclusion précédente donne

$$B \subset F + \frac{1}{2}B \subset F + \frac{1}{2}\left(F + \frac{1}{2}B\right) = F + \frac{1}{4}B$$

et par récurrence $B \subset F + \frac{1}{2^n}B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, si $x \in B$ on peut trouver $x_n \in F$ tel que $d(x, x_n) = \|x - x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $d(x, F) = 0$ ce qui entraîne $x \in \overline{F}$ et, puisque F est fermé, $x \in F$. Dans ce cas E tout entier est inclus dans F qui est de dimension finie. $\square$

1.4. **Exercices.**

Exercice 1. Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que l'application
$$N : f \to N(f) = |f(0)| + \sup_{0\le x<y\le 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$
est bien définie sur L et qu'elle y définit une norme.

(2) Montrer qu'il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $f \in L$:
$$\|f\|_\infty \le cN(f).$$

(3) Existe-t-il une constante $c'>0$ telle que pour tout $f \in L$:
$$N(f) \le c'\|f\|_\infty \quad ?$$
Conclure.

Exercice 2. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $f \in \mathcal{L}$,
$$\|f\|_{\mathsf{Lip}} = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

(1) Soit $f \in \mathcal{L}$, positive (et non nulle). Montrer que, pour tout $x \ge 0$, on a :
$$f(x)^2 \le 2\|f\|_{\mathsf{Lip}} \int_x^{x+\frac{f(x)}{\|f\|_{\mathsf{Lip}}}} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

(2) Montrer que, si $f \in \mathcal{L} \cap L^1(\mathbb{R})$, alors $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et f tend vers 0 à l'infini.

(3) Montrer que, sur $E = \mathcal{L} \cap L^1(\mathbb{R})$, l'application $\|\cdot\|_{\mathsf{Lip}}$ définit une norme.

(4) Montrer que, pour tout $f \in E$, on a :
$$\|f\|_\infty \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|f\|_{\mathsf{Lip}}.$$

(5) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{\mathsf{Lip}}$ sont-elles équivalentes sur E ?

(6) Les normes $\|\cdot\|_{\mathsf{Lip}}$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{\mathsf{Lip}}$ sont-elles équivalentes sur E ?

(7) Les normes $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{\mathsf{Lip}}$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 3. Démontrer que dans tout espace normé on a, pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$:
$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \le 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 4. Soit E un evn et H le noyau d'une forme linéaire non nulle u. Montrer que pour tout $a \in E$:
$$d(a,H) = \frac{|u(a)|}{\|u\|}.$$

Exercice 5. Sur l'espace de Banach $E = \mathcal{C}^0([0,1])$, on considère la forme linéaire $T : f \mapsto f(0)$. Montrer que T est continue vis-à-vis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais non continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 6. Soit G un evn et F un sous-espace strict. Montrer qu'il existe $u \in G$ tel que : $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 7. Opérateurs compacts. Soient E et F deux evn sur $\mathbb{K}$. On dit que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si $T(B_f(0,1))$ est relativement compact dans F.

(1) Montrer que tout opérateur de rang fini est compact.
(2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ des opérateurs compacts est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.
(3) Montrer que la composée (à droite et à gauche) d'un opérateur compact et d'un opérateur continu est un opérateur compact.
(4) Soit T un opérateur compact de E dans E. Montrer que $\ker(\mathsf{Id} - T)$ est de dimension finie et que $\Im(I - T)$ est fermée.
(5) Soit T un opérateur compact de E dans E injectif. Montrer que $\Im(I - T) = E$. On raisonnera par l'absurde en introduisant $E_n = \Im(\mathsf{Id} - T)^n$. On montrera que E_n est fermé, que la suite (E_n) est décroissante et que $E_n \neq E_{n+1}$. On conclura avec l'exercice précédent.

Exercice 8. Dual de $l^p(\mathbb{N})$. Pour $p \in [1, +\infty[$, on note :

$$l^p(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

On définit q par :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pour $y \in l^q(\mathbb{N})$, on pose, pour $x \in l^p(\mathbb{N})$:

$$\varphi_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

(1) Montrer que pour tout $y \in l^q(\mathbb{N})$, on a : $\varphi_y \in \left(l^p(\mathbb{N})\right)'$.
(2) Montrer que $\varphi : y \mapsto \varphi_y$ est linéaire et isométrique de $l^q(\mathbb{N})$ à valeurs dans $\left(l^p(\mathbb{N})\right)'$.
   Soit $L \in l^p(\mathbb{N})'$. On pose $y_n = L(e_n)$.
(3) Pour $p = 1$, montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$.
(4) Pour $p \in]1, +\infty[$, on pose : $x_n = |y_n|^{q-1}\mathsf{sgn}(y_n)$. Montrer que pour tout $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} |y_n|^q \leq \|L\|_{l^p(\mathbb{N})'} \left\| \sum_{n=0}^{N} x_n e_n \right\|_{l^p(\mathbb{N})}.$$

(5) En conclure que :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^q \right)^{1-1/p} \leq \|L\|_{l^p(\mathbb{N})'}.$$

(6) En déduire que $y \in l^q(\mathbb{N})$.

(7) Conclure que φ est surjective.

2. Théorèmes de Hahn-Banach : compléments

2.1. **Théorème de Hahn-Banach analytique.**

2.1.1. *Rappel du lemme de Zorn.* On rappelle si $(P, \prec)$ est un ensemble ordonné et si $Q \subset P$, alors $c \in P$ est un majorant de Q si pour tout $a \in Q$, on a $a \prec c$. On dit que $m \in P$ est maximal si pour tout $x \in P$, $m \prec x$ implique $m = x$. Un ensemble est dit inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Lemme 2.1. *Tout ensemble ordonné inductif et non vide admet un élément maximal.*

2.1.2. *Énoncé et preuve du théorème.*

Théorème 2.2. *Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E, \forall \lambda > 0, \tag{2.1}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \tag{2.2}$$

Soit $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que :

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g et telle que :

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Démonstration. La preuve utilise fondamentalement le lemme de Zorn. Soit P l'ensemble des prolongements linéaires h de g tels que $h(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in D(h)$. P est muni de la relation d'ordre notée $\prec$:

$$h_1 \prec h_2 \Leftrightarrow h_2 \text{ prolonge } h_1.$$

P est non vide puisque $g \in P$. Vérifions que P est inductif. Soit $Q = (h_i)_{i \in I}$ un sous-ensemble de P totalement ordonné. Montrons qu'il est majoré. On définit l'application linéaire h par :

$$D(h) = \cup_{i \in I} D(h_i) \text{ et } h(x) = h_i(x), \text{ pour } x \in D(h_i).$$

h est bien définie. En effet, si $i \neq j$, on a par exemple $h_i \prec h_j$ et donc $h_i(x) = h_j(x)$ pour $x \in D(h_i) \subset D(h_j)$. Par définition on a aussi $h(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in D(h)$.

Le lemme de Zorn assure donc l'existence d'un élément maximal pour P. Notons f un tel élément et montrons que $D(f) = E$. On raisonne par l'absurde en supposant que $D(f) \notin E$. Soit $x_0 \notin E$. Posons $D(h) = D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$ et introduisons :

$$h(x + tx_0) := f(x) + t\alpha,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante à choisir convenablement. On a : $f \prec h$. Il n'y a plus qu'à vérifier que :

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0).$$

Par hypothèse, on est réduit à le montrer pour $t = \pm 1$, c'est à dire :

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x)).$$

Un tel choix est possible puisque, par hypothèse, pour tous $x, y \in D(f)$, on a :

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x).$$

On a donc construit un prolongement strict de f majoré par p. C'est contradictoire. $\square$

Corollaire 2.3. *Soit G un sous-espace vectoriel de E et g une application linéaire continue. Alors, il existe $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ telle que f prolonge g et vérifiant :*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} = \|g\|_{\mathcal{L}(G,\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach avec $p(x) = \|g\|_{\mathcal{L}(G,\mathbb{R})}\|x\|$. □

Corollaire 2.4. *Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ telle que :*

$$\|f_0\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} = \|x_0\| \text{ et } f(x_0) = \|x_0\|^2.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ avec $G = \mathbb{R}x_0$. □

Corollaire 2.5. *Pour tout $x \in E$, on a :*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})\\ \|f\|\leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})\\ \|f\|\leq 1}} |f(x)|.$$

Démonstration. Pour $x = 0$, c'est clair. Pour $x \neq 0$, on a : $\sup_{\substack{f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})\\ \|f\|\leq 1}} |f(x)| \leq \|x\|$. De plus, il existe $f_0 \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ telle que $\|f_0\| = \|x\|$ et $f_0(x) = \|x\|^2$. On pose $f_1 = \|x\|^{-1}f_0$ et le résultat en découle. □

2.2. **Théorème de Hahn-Banach géométrique.**

Définition 2.6. Un hyperplan affine de E est un ensemble de la forme :

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\},$$

où $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.7. *Un hyperplan d'équation $f(x) = \alpha$ est fermé si et seulement si f est continue.*

Démonstration. Si f est continue, alors l'hyperplan $f(x) = \alpha$ est clairement fermé.

La réciproque demande un peu plus de travail. Supposons que l'hyperplan $f(x) = \alpha$ est fermé. Le complémentaire de H est donc un ouvert non vide de E. Soit $x_0 \in E \setminus H$. On peut supposer que $f(x_0) < \alpha$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset X \setminus H$; on a alors : $f(x) < \alpha$.

Si on avait $x_1 \in B(x_0, r)$ tel que $f(x_1) > \alpha$, on considérerait le segment $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$, $t \in [0,1]$. On aurait $f(x_t) \neq \alpha$ pour $t \in [0,1]$; c'est absurde puisque $f(x_t) = \alpha$ pour $t = \frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)}$.

On en déduit que $f(x_0 + rz) < \alpha$ pour $z \in B(0,1)$.

□

Définition 2.8. On dit que l'hyperplan $f(x) = \alpha$ sépare A et $B \subset E$ au sens large si $f(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in A$ et $f(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in B$. On dit que l'hyperplan $f(x) = \alpha$ sépare A et $B \subset E$ au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ pour tout $x \in A$ et $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ pour tout $x \in B$.

Lemme 2.9. *Soit C un convexe ouvert de E avec $0 \in C$. Pour tout $x \in E$, on pose :*

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}.$$

Alors, p vérifie (2.1) et (2.2) et il existe M tel que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$ et :

$$C = \{x \in E : p(x) < 1\}.$$

Démonstration. p vérifie (2.1) trivialement. Il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$ de sorte que $p(x) \leq r^{-1}\|x\|$.

Si $x \in C$, alors (C est ouvert), pour un certain $\varepsilon > 0$, $(1+\varepsilon)x \in C$ et donc $p(x) \leq (1+\varepsilon)^{-1} < 1$. Inversement, si $p(x) < 1$, on déduit l'existence de $\alpha_0 \in (0, 1)$ tel que $\alpha_0^{-1}x \in C$. On écrit alors $x = \alpha_0(\alpha_0^{-1}x) + (1 - \alpha_0)0 \in C$.

Il reste à vérifier (2.2). Soient $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$. On a : $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ et $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ par la caractérisation de C et (2.1). Par convexité, on en tire, pour $t \in [0, 1]$:

$$t\frac{x}{p(x) + \varepsilon} + (1 - t)\frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C.$$

On prend alors :

$$t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$$

et on trouve :

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C.$$

□

Lemme 2.10. *Soit C un convexe ouvert non vide et $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$. Ainsi, l'hyperplan $f(x) = f(x_0)$ sépare C et $\{x_0\}$ au sens large.*

Démonstration. On peut toujours supposer que $0 \in C$. Soit p la jauge de C. On introduit $G = \mathbb{R}x_0$ avec $x_0 \notin C$ et on pose :

$$g(tx_0) = t.$$

Pour $t \geq 0$, on remarque que :

$$t = g(tx_0) \leq p(tx_0) = tp(x_0).$$

Si $t \leq 0$, on a trivialement : $t \leq p(tx_0)$. Ainsi, on a :

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Il existe ainsi $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ qui prolonge g (donc $f(x_0) = 1$) et telle que :

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

On a : $f(x) < 1$ pour $x \in C$. □

Théorème 2.11. *Soient $A, B \subset E$ deux convexes non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors, il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et B au sens large.*

Démonstration. On pose $C = A - B$. C est encore convexe et $0 \notin C$. C est ouvert. Il existe donc $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $f(z) < 0$ pour $z \in C$. Cela signifie que :

$$f(x) < f(y), \quad \forall x \in A, y \in B.$$

□

Lemme 2.12. *Soient $A, B \subset E$ non vides, convexes et disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Pour $\varepsilon > 0$, on pose :*

$$A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon), \quad B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon).$$

Alors, A_ε et B_ε sont ouverts et non vides et Alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset.$$

Démonstration. Le fait que A_ε et B_ε soient ouverts est un fait élémentaire. Supposons qu'il existe $\varepsilon_n \to 0$ telle que $A_{\varepsilon_n} \cap B_{\varepsilon_n} \neq \emptyset$. Il existerait alors deux suites $a_n \in A$ et $b_n \in B$ telles que $a_n + r_n = b_n + \tilde{r}_n$ avec $\|r_n\| < \varepsilon_n$ et $\|\tilde{r}_n\| < \varepsilon_n$. Comme B est compact, quitte à extraire une sous-suite de b_n on peut supposer que b_n tend vers $b \in B$. Alors, a_n tend vers b et comme A est fermé, on en déduit que $b \in A$. C'est une contradiction. $\square$

Théorème 2.13. *Soient $A, B \subset E$ non vides, convexes et disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut trouver un hyperplan fermé qui sépare A_ε et B_ε :

$$f(a + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(b + \varepsilon z), \forall a \in A, \forall b \in B, \forall z \in B(0, 1).$$

Il vient :

$$f(a) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon \|f\|.$$

L'hyperplan $f(x) = \alpha$ convient. $\square$

2.3. **Exercices.**

Exercice 1. Soit E un evn de dimension finie et V un sous-espace vectoriel. Soit f une forme linéaire sur V.

(1) Si E est muni de la norme euclidienne, montrer qu'on peut prolonger f à E en une forme linéaire de même norme.
(2) On suppose que $\|f\| = 1$. Soit $u \in E$. Montrer qu'il existe un réel a tel que :
$$f(x) - \|x - u\| \leq a \leq f(y) + \|y - u\|, \quad \forall x, y \in V.$$
(3) Soit $u \notin V$. On pose :
$$g(x + tu) = f(x) + ta.$$
Montrer que g prolonge f à $V \oplus \mathbb{R}u$ et que $\|g\| = \|f\|$.
(4) Conclure.

Exercice 2. Soit E un evn. Soit $x \in E$, non nul. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$.

Exercice 3. Soit E un evn. Soit $e_1, \cdots, e_n$ une famille libre de vecteurs de norme 1. Montrer qu'il existe n formes linéaires continues $f_1, \cdots, f_n$ telles que $f_j(e_i) = \delta_{ij}$. Si E est de dimension infinie, que dire de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$? Réciproque ?

Exercice 4. Soient E un evn et $x, y \in E$ distincts. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x) \neq f(y)$.

Exercice 5. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq E$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ non nulle telle que $f(x) = 0$ sur F. Reformuler ce résultat en un critère pour établir la densité d'un sous-espace.

Exercice 6. Soit E un espace de Banach. Soit (u_n) une suite telle que $(f(u_n))$ converge pour toute $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. Étant donné un sous-ensemble A de E, on définit son orthogonal dual par
$$A^{\perp} = \{\phi \in E'; \forall x \in A \quad \phi(x) = 0\}.$$

(1) Montrer que si $A \subset B \subset E$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. Que vaut $E^{\perp}$?
(2) Montrer que $A^{\perp} = (\text{Vect}(A))^{\perp}$ et que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
Pour une partie C de E', on introduit
$$^{\perp}C = \{x \in E; \forall \phi \in C \quad \phi(x) = 0\}.$$
(3) Écrire et démontrer les propriétés duales des questions (1) et (2).
(4) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F} \subset {}^{\perp}(F^{\perp})$. En utilisant le théoréme de Hahn-Banach, montrer l'inclusion réciproque.

3. Espaces complets : rappels

3.1. **Suites de Cauchy, espaces métriques complets, exemple fondamental.**

3.1.1. *Suites de Cauchy.*

Définition 3.1. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X,d) est de Cauchy si elle vérifie

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall m,n\geq N_\varepsilon,\ d(x_m,x_n)\leq\varepsilon.$$

Proposition 3.2. *Une suite de Cauchy est toujours bornée.*

Démonstration. Il existe N_1 tel que : $\forall m,n\geq N_1, d(x_m,x_n)\leq 1$. En particulier, on a pour $n\geq N_1$, $d(x_n,x_{N_1})\leq 1$ et en posant $M=\max_{k<N_1} d(x_k,x_{N_1})$:

$$\forall n\in\mathbb{N}, d(x_n,x_{N_1})\leq\max\{M,1\}.$$

□

L'argument suivant est très commode.

Proposition 3.3. *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (X,d) telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=l\in X$. Pour $\varepsilon>0$ il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ et $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tels que

$$\left(\forall m,n\geq N_\varepsilon,\ d(x_m,x_n)\leq\frac{\varepsilon}{2}\right)\text{ et }\left(\forall k\geq k_\varepsilon,\ d(x_{n_k},l)\leq\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On prend $N'_\varepsilon=\max\{N_\varepsilon,n_{k_\varepsilon}\}$ et on a pour $n\geq N'_\varepsilon$

$$d(x_n,l)\leq d(x_n,x_{n_{k_\varepsilon}})+d(x_{n_{k_\varepsilon}},l)\leq\varepsilon.$$

Ainsi, on a : $\lim_{n\to\infty} x_n=l$. □

3.1.2. *Espace métrique complet.*

On commence par un résultat assez simple

Proposition 3.4. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (X,d) telle que $\lim_{n\to\infty} x_n=l\in X$. Pour $\varepsilon>0$, il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $d(x_n,l)\leq\frac{\varepsilon}{2}$ pour $n\geq N_\varepsilon$. On a alors :

$$\forall m,n\geq N_\varepsilon,\ d(x_m,x_n)\leq d(x_m,l)+d(l,x_n)\leq\varepsilon$$

et la suite est de Cauchy. □

Un espace métrique complet est un espace métrique ou la réciproque est vraie.

Définition 3.5. On dit que l'espace métrique (X,d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

3.1.3. *Exemple fondamental.*

Théorème 3.6. $\mathbb{R}$ *est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Elle est bornée : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leq M$. On peut donc extraire une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$ (puisque $[-M, M]$ est compact). Mais alors la Proposition 3.3 donne la convergence de toute la suite.

□

Remarque 3.7. On peut faire une démonstration sans utiliser l'argument de compacité et en revenant à la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de montrer que les suites $y_n = \inf_{p\geq n} x_p$ et $z_n = \sup_{p\geq n} x_p$ sont des suites adjacentes.

• *Exemple.* $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. On peut approcher un irrationnel $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par une suite de rationnels $x_n = \frac{p_n}{q_n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{Q}$. Elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $r \notin \mathbb{Q}$.

3.1.4. *Un autre exemple.*

Théorème 3.8. *Si X est un ensemble et (X', d') est un espace métrique complet, alors $\mathcal{F}_b(X; X')$ muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon,\ \sup_{x\in X} d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X', d') qui est complet et admet donc une limite dans X' que l'on note $f(x)$.

On a ainsi défini une fonction $f : X \to X'$. Vérifions qu'elle est bornée sur X. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f_{N_1}, f_n) \leq 1$ pour tout entier $n \geq N_1$. On a alors pour $y_0 \in X'$ (on note également y_0 la fonction constante $X \to X'$ associée) :

$$\forall x \in X,\ \forall n \geq N_1,\ d'(y_0, f_n(x)) \leq d'(y_0, f_{N_1}(x)) + 1 \leq d_\infty(y_0, f_{N_1}) + 1$$

et en prenant la limite $n \to \infty$ (pour $x \in X$ fixé) on obtient :

$$\forall x \in X,\ d'(y_0, f(x)) \leq d_\infty(y_0, f_{N_1}) + 1$$

et $f \in \mathcal{F}_b(X; X')$.

Vérifions enfin que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{F}_b(X; X')$ pour la distance de la convergence uniforme d_∞. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, on a l'inégalité $d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. On prend la limite $m \to \infty$ à $x \in X$ fixé et on obtient

$$\forall x \in X,\ \forall n \geq N_\varepsilon,\ d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui s'écrit aussi, puisque N_ε ne dépend pas de x, $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$. Ainsi, on a :

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$$

et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$. □

Remarque 3.9. La démonstration ci-dessus procède d'une méthode assez générale pour établir la complétude d'un espace métrique : 1) Identifier une limite possible pour la suite de Cauchy (souvent en utilisant un résultat de complétude connu et en faisant intervenir une topologie mieux connue) ; 2) Vérifier que l'éventuelle limite est bien dans l'ensemble 3) Vérifier que la suite converge bien vers cette limite pour la distance de départ. Pour 2) et 3) il faut bien faire attention aux dépendances par rapport à ε (et $x \in X$ pour des espaces de fonctions) et travailler avec des inégalités larges (plus facile pour passer à la limite).

3.2. **Propriétés des espaces complets.**

3.2.1. *Fermés de complets.*

Proposition 3.10. *Dans un espace métrique complet (X, d), les sous-espaces complets sont les fermés.*

Démonstration. Soit F une partie d'un espace métrique complet (X, d).
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons F fermé. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (F, d), c'est une suite de Cauchy de (X, d). Elle admet donc une limite dans X. Mais comme F est fermé cette limite appartient à F.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons (F, d) complet. Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F admet une limite $l \in X$, alors elle est de Cauchy dans (X, d) et donc dans (F, d). Comme (F, d) est complet elle converge dans F et comme (X, d) est séparé cela entraîne $l \in F$. F est fermé.

□

Corollaire 3.11. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et (X', d') est un espace métrique complet, l'espace $\mathcal{C}_b^0(X; X')$ des fonctions continues bornées de X dans X' muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Démonstration. C'est une partie fermée de l'espace métrique complet $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$. Il est donc complet. □

Corollaire 3.12. *Soit (X, d) un espace métrique. Une intersection quelconque de sous-espaces complets est complète.*

Démonstration. L'intersection $\cap_{i\in I} F_i$ est une intersection de fermés donc un fermé de l'espace complet (F_{i_0}, d). C'est un complet. □

3.2.2. *Union de complets et complétude des compacts.* Pour ces deux cas, la complétude s'obtient en montrant la convergence d'une sous-suite d'une suite de Cauchy.

Proposition 3.13. *Soit (X, d) un espace métrique. Une union finie de sous-espaces complets de (X, d) est complète.*

Démonstration. Soit $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ une famille finie de parties complètes de (X, d). Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (X, d), il existe $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ et une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k} \in A_{i_O}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (A_{i_0}, d) qui est complet. On a trouvé une sous-suite convergente et on conclut avec la Proposition 3.3. □

Proposition 3.14. *Tout espace métrique compact est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique compact (X, d). On peut en extraire une sous-suite qui converge dans (X, d) et on conclut avec la Proposition 3.3. $\square$

3.3. **Produit d'espaces complets.**

Proposition 3.15. *Un produit fini ou dénombrable d'espaces métriques complets est complet.*

Démonstration. Le cas fini a déjà été traité dans le Théorème 3.8 puisque pour les produits finis convergence simple (topologie produit) et convergence uniforme coïncident. Il reste à traiter le cas dénombrable. Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques complets. On note d la distance sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ donnée par

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

pour laquelle la topologie associée est la topologie produit. Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, d\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $k, l \in \mathbb{N}$ assez grands, on a $d_n(x_n^k, x_n^l) \leq \frac{2^n d(x^k,x^l)}{1-2^n d(x^k,x^l)}$. Ainsi la suite $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X_n, d_n) et donc converge dans X_n. Ainsi la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la topologie de la convergence simple dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, mais cette topologie n'est rien d'autre que la topologie associée à d. $\square$

• *Exemple.* Ainsi $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tous les espaces vectoriels normés de dimension finie et leurs parties fermées sont des espaces métriques complets. Si on met la distance d sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, c'est un espace métrique complet mais cette distance n'est pas associée à une norme.

3.4. **Espaces de Banach.** On travaille avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.16. On appelle espace de Banach un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet.

On a vu au paragraphe précédent la

Proposition 3.17. *Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Banach.*

Proposition 3.18. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(E, \| \ \|_E)$ est un espace de Banach alors $\mathcal{F}_b(X; X')$ et $\mathcal{C}_b^0(X; X')$ munis de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$ sont des espaces de Banach.*

Démonstration. Déjà fait avec le Corollaire 3.11). Il suffit de prendre $(X', d') = (E, \| \ \|_E)$. $\square$

• *Exemple.* L'espace $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_\infty$ est un espace de Banach. En revanche $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_1$ n'est pas complet. On prend la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $f_n(x) = 1$ pour $x \leq 0$, $f_n(x) = 1 - (n + 1)x$ pour$0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}$ et $f(x) = 0$ pour $\frac{1}{n+1} \leq x \leq 1$.

On a alors

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \leq \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(m+1)} \leq \varepsilon$$

pour $m, n \geq \varepsilon^{-1}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy mais ne peut pas converger dans $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ pour la norme $\| \ \|_1$. Une fonction qui vaut 1 sur $[-1, 0[$ et 0 sur $]0, 1]$ n'est pas continue.

La complétude d'un espace vectoriel normé est très utile pour étudier la convergence des séries.

Définition 3.19. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$ on dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est absolument convergente (ou normalement convergente) si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < +\infty$.

Dans la définition ci-dessus on ne dit pas que la série converge mais que la série des normes converge. La convergence de la série est éventuellement une conséquence du

Théorème 3.20. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge dans E,*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty\right) \Rightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in E\right).$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons $(E, \| \|_E)$ complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty$. Alors les sommes $S_N = \sum_{n\le N} x_n$ vérifient pour $M \geq N$

$$\|S_M - S_N\|_E = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} x_n\right\|_E \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\|_E .$$

Ainsi, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $(E, \| \|)$ et donc converge.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(E, \| \|_E)$. On peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| \leq 2^{-k}$ (il suffit de prendre $n_k = N_{2^{-k}}$). On pose alors $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ est absolument convergente donc converge dans $(E, \| \|_E)$ par hypothèse. Or on a $x_{n_{k+1}} - x_{n_0} = \sum_{j=0}^{k} u_j$ et on en déduit que la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \| \|_E)$. Avec la Proposition 3.3 on obtient $\lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0} + \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$. □

3.5. **Applications.**

3.5.1. *Un exemple avec les séries.*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'une norme d'algèbre (par exemple $\|A\| = \max_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$).

Proposition 3.21. *Si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la série $f(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n A^n$ converge dès que $\|A\| < R$.*

Démonstration. Puisque $\| \|$ est une norme d'algèbre, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $\|c_n A^n\| = |c_n| \|A^n\| \leq |c_n| \|A\|^n$. Pour $\|A\| < R$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| \|A\|^n < +\infty$ et la série $f(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n A^n$ est absolument convergente donc convergente. □

• *Exemple.* Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on peut définir e^{tA}, e^{itA}, $\cos(tA)$,... et pour $\|A\| < 1$ ($\| \|$ norme d'algèbre), $(\mathrm{Id} + A)^{-1}$ et $\ln(\mathrm{Id} + A)$.

3.5.2. *Prolongement.*

Théorème 3.22. ***(Théorème de prolongement)*** *Soit (X, d), (X', d') deux espaces métriques, avec (X', d') complet et soit $Y \subset X$. Si une application $f : Y \to X'$ est uniformément continue et si Y est dense dans X, alors f admet un unique prolongement par continuité $\tilde{f} : X \to X'$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in X$ la limite $\lim_{\substack{y\to x\\ y\in Y}} f(y)$ existe dans X'. Comme (X,d) est un espace métrique on peut utiliser les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y telles que $\lim_{n\to\infty} y_n = x \in X$. Une telle suite est nécessairement de Cauchy dans (X,d) et donc dans(Y,d). Comme f est uniformément continue, la suite image $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X',d') qui est complet. Par conséquent cette suite image $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (X',d') et ce pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y convergeant vers x. On vérifie enfin l'indépendance de la limite par rapport au choix de la suite.

□

Comme on sait que les applications linéaires continues sont nécessairement lipschitziennes et donc uniformément continues, la version du théorème ci-dessus dans les espaces vectoriels normés est

Corollaire 3.23. *Si $(E,\|\ \|_E)$ est un espace vectoriel normé, $(F,\|\ \|_F)$ est un espace de Banach et si D est un sous-espace vectoriel dense de E, toute application linéaire continue $(D,\|\ \|_E)\to(F,\|\ \|_F)$ se prolonge en une application linéaire continue de $(E,\|\ \|_E)$ dans $(F,\|\ \|_F)$.*

• *Exemple.* L'intégrale définie de $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, $\int_0^1 f(t)\ dt$ est continue quand on munit $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_1$. Comme $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ est dense dans $(L^1([0,1];\mathbb{R}),\|\ \|_1)$ qui est complet (cf. Cours d'Intégration). Elle se prolonge de manière unique en une application linéaire continue à $L^1([0,1];\mathbb{R})$.

3.5.3. *Point fixe des applications contractantes.*

Théorème 3.24. ***(Picard)*** *Soit (X,d) un espace métrique complet. Si l'application $f: X\to X$ est une application contractante*

$$\forall x,y\in X,\ d\left(f(y),f(x)\right)\le\alpha\, d(y,x),\quad \alpha<1,$$

alors elle admet un unique point fixe $x\in X$, $f(x)=x$. De plus toute suite récurrente donnée par $x_{n+1}=f(x_n)$ et $x_0\in X$ converge géométriquement vers x

$$\forall n\in\mathbb{N}, d(x_n,x)\le d(x_0,x)\alpha^n.$$

Démonstration. 1) Unicité : Supposons que $x_1,x_2\in x$ soient deux points fixes de f. On a alors

$$d(x_1,x_2)=d(f(x_2),f(x_1))\le\alpha d(x_2,x_1).$$

L'inégalité $(1-\alpha)d(x_1,x_2)\le 0$ avec $\alpha<1$ entraîne $x_2=x_1$.
2) Existence : On va construire x par une méthode d'approximation successive. On considère une suite récurrente donnée par $x_{n+1}=f(x_n)$ avec $x_0\in X$. Pour $m,n\in\mathbb{N}$ on a en supposant $n\ge m$

$$d(x_n,x_m)\le\sum_{k=m}^{n} d\left(x_{k+1},x_k\right)=\sum_{k=m}^{n-1} d\left[f^k(x_1),f^k(x_0)\right].$$

La propriété de contraction avec $\alpha<1$ donne

$$d\left[f^k(x_1),f^k(x_0)\right]\le\alpha d\left[f^{k-1}\left(x_1\right),f^{k-1}\left(x_0\right)\right]\le\alpha^k d(x_1,x_0)$$

puis

$$d(x_n,x_m)\le\sum_{k=m}^{n-1}\alpha^k d(x_1,x_0)\le\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x_1,x_0).$$

Pour $\varepsilon > 0$, on prend $N_\varepsilon > \frac{\ln((1-\alpha)\varepsilon/d(x_0,x_1))}{\ln(\alpha)}$ et on a pour $m, n \geq \varepsilon$, $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d). Elle admet une limite $x \in X$ qui doit vérifier puisque f est continue $f(x) = x$.
3) Convergence géométrique : Pour une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, x) = d\left[f^n(x_0), f^n(x)\right] \leq \alpha^n d(x_0, x)$$

et la convergence vers x est géométrique de raison α. □

3.5.4. *Théorème d'Ascoli.*

Lemme 3.25. *Tout espace métrique précompact et complet (E, d) est compact.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de (E, d). Montrons que (x_n) converge. Puisque (E, d) est précompact, il existe $a_0 \in E$ et une sous-suite $(x_{\varphi_0(n)})$ tels que :

$$x_{\varphi_0(n)} \in B\left(a_0, \frac{1}{2}\right).$$

Or, $B\left(a_0, \frac{1}{2}\right)$ est encore précompact de sorte qu'on peut extraire de nouveau une sous-suite telle que :

$$x_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)} \in B\left(a_0, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(a_1, \frac{1}{4}\right).$$

Par récurrence, on trouve

$$x_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(n)} \in \bigcap_{j=0}^{k} B\left(a_j, \frac{1}{2^{j+1}}\right).$$

On pose $\psi(n) = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$. La suite $(x_{\psi(n)})$ est extraite de (x_n) et on a :

$$x_{\psi(n)} \in \bigcap_{j=0}^{n} B\left(a_j, \frac{1}{2^{j+1}}\right).$$

Soient $n \geq m$. On a

$$d(x_{\psi(n)}, x_{\psi(m)}) \leq \frac{2}{2^{m+1}}$$

si bien que $(x_{\psi(n)})$ est de Cauchy. L'espace (E, d) ´tant complet, cette sous-suite converge. □

Théorème 3.26. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact et (E, d) un espace complet. Pour qu'une partie $A \subset \mathcal{C}(X, E)$ soit relativement compacte il faut et il suffit que A soit équicontinue, i.e. :*

$$\forall\varepsilon > 0, \forall x \in X,\ \exists O_x \in \mathcal{T},\ \forall f \in A,\ \forall y \in O_x \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

et que pour tout $x \in X$, la partie $A(x)$ soit relativement compacte.

Démonstration. En vertu du lemme précédent, comme (E, d) et $(\mathcal{C}(X, E), d_\infty)$ sont complets, on peut remplacer « relativement compact » par « précompact ».

• *Nécessité.* Soit A une partie relativement compacte de $(\mathcal{C}(X,E), d_\infty)$. A est précompact. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $f_1, \cdots, f_N$ tels que :

$$A \subset \cup_{i=1}^N B_{d_\infty}(f_i, \varepsilon).$$

Il est aisé de vérifier que la partie finie $\{f_1, \cdots, f_N\}$ est équicontinue. Soit alors $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. On considère le O_x donné par l'équicontinuité des f_i. Si $f \in A$, il existe $i \in \{1, \cdots, N\}$ tel que $d_\infty(f, f_i) < \varepsilon$. Pour tout $y \in O_x$, on a :

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) \leq 3\varepsilon.$$

Par ailleurs, l'application $A \ni f \mapsto f(x) \in E$ est continue. Elle envoie donc $\overline{A}$ sur un compact de E. Ainsi $A(x)$ est inclus dans un compact et est donc précompact.

• *Suffisance.* On suppose donc que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists O_x \in \mathcal{T}, \forall f \in A, \forall y \in O_x \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

On a $X = \cup_{x \in X} O_x$. Par compacité, on peut trouver un nombre fini de x_i tels que :

$$X = \cup_{i=1}^n O_{x_i}.$$

Considérons $C = \cup_{i=1}^n A(x_i)$. $C \subset E$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre fini de $c_j \in E$ tels que :

$$C \subset \cup_{j=1}^m B_d(c_j, \varepsilon).$$

Si $\phi : \{1, \cdots n\} \to \{1, \cdots, m\}$, on pose :

$$L_\phi = \{f \in \mathcal{C}(X,E) : \forall i = 1, \cdots, n, \forall y \in O_{x_i} : d(f(y), c_{\phi(i)}) \leq 2\varepsilon\}.$$

Soit $f \in A$. Pour tout $i = 1, \cdots n$, il existe O_{x_i} tel que :

$$\forall y \in O_{x_i} : d(f(y), f(x_i)) \leq \varepsilon.$$

Or $f(x_i) \in C$, il existe donc $j_i \in \{1, \cdots m\}$ tel que $d(f(x_i), c_{j_i}) < \varepsilon$. Ainsi A est recouvert par l'union finie des L_ϕ. Il est aisé de voir que les L_ϕ ont un diamètre inférieur à 4ε. $\square$

3.6. **Exercices.**

Exercice 1. Un théorème d'Ascoli Soit (X, d_X) un espace métrique compact et $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On munit alors l'espace $C(X, E)$ des fonctions continues de X dans E de la distance

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_E,$$

Soit $\Omega \subset C(X, E)$. On dira que la propriété (P) est vérifiée si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall f \in \Omega, \forall y \in X, d_X(x, y) < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_E < \varepsilon.$$

(b) pour tout $x \in X$ l'ensemble $\Omega(x) = \{f(x),\ f \in \Omega\}$ est borné.

• *Partie 1 : $\bar{\Omega}$ compact dans* $(C(X, E), \delta) \Rightarrow (P)$. On se propose de montrer dans un premier temps que si l'adhérence de Ω dans $(C(X, E), \delta)$ est compact alors (P) est vérifiée. On suppose donc $\bar{\Omega}$ compact dans $(C(X, E), \delta)$.

(1) Soit $x \in X$. En utilisant le caractère lipschitzien de l'application

$$\Phi_x : f \in C(X, E) \to f(x) \in E,$$

montrer que $\Phi_x(\bar{\Omega})$ est compact. En déduire que (b) est satisfaite.

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier N et $(f_1, \cdots, f_N) \in \Omega^N$ tels que

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\delta(f_i, \varepsilon).$$

(3) En remarquant que la propriété (a) est satisfaite pour l'ensemble $\tilde{\Omega} = (f_1, \cdots, f_N)$, vérifier qu'elle l'est aussi pour Ω.

• *Partie 2 : $\bar{\Omega}$ compact dans* $(C(X, E), \delta) \Leftarrow (P)$. On se propose maintenant de montrer la réciproque. On suppose donc que (P) est vraie. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Ω.

(1) En utilisant la compacité de X, Montrer que (a) implique que :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall f \in \Omega, \forall (x, y) \in X^2, d_X(x, y) < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_E < \varepsilon.$$

(2) Rappeler pourquoi un compact dans un espace métrique est séparable. Dans la suite, on considère $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partie de X dénombrable et dense.

(3) Montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\phi(n)}(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $i \in \mathbb{N}$. On note $g(x_i)$ cette limite.

(4) Montrer que $g : \{x_i, i \in \mathbb{N}\} \to E$ est uniformément continue.

(5) Montrer qu'on peut prolonger g à X en une application uniformément continue h et conclure qu'on peut extraire de (f_n) une sous-suite convergente.

(6) Conclure.

Exercice 2. On considère l'ensemble L des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$. On définit une norme N sur L par :

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

(1) Expliquer pourquoi (L, N) est complet.

(2) Montrer que la boule unité fermée de L pour N est une partie compacte de l'espace $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 3. Sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes on pose, pour

$$P = \sum_0^n a_k X^k, \qquad \|P\|_\infty = \sup_k |a_k|,$$

$$\|P\|_1 = \sum_0^n |a_k|, \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_0^n |a_k|^2}.$$

Montrer que l'on définit ainsi trois normes non équivalentes et que l'espace $\mathbb{C}[X]$ n'est complet pour aucune de ces normes.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) + f'(t)|$$

définissent deux normes équivalentes sur E et que E est complet.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E. Soit $f : K \to K$ une fonction 1-lipschitzienne ; montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace complet et $f : X \to X$ telle qu'il existe une itérée de f contractante. Montrer que f a un unique point fixe.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme et $(x,y) \mapsto K(x,y)$ une fonction continue sur $[a,b]^2$. Montrer que pour tout $\phi \in E$, l'équation :

$$f(x) = \int_a^x K(x,y) f(y)\, dy + \phi(x), \quad x \in [a,b],$$

possède une unique solution $f \in E$.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique complet et (Λ, δ) un espace métrique. On considère une application $f : X \times \Lambda \to X$ telle que :

$$f(f(x,\lambda), f(y,\mu)) \leq k d(x,y) + l \delta(\lambda, \mu), \quad x, y \in X, \quad \lambda, \mu \in \Lambda,$$

où $k \in (0,1)$ et $l > 0$.

Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique $x_\lambda \in X$ tel que :

$$f(x_\lambda, \lambda) = x_\lambda.$$

Montrer alors que $\lambda \mapsto x_\lambda$ est lipschitzienne.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Soit K une fonction continue de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$|K(x,y,z_1) - K(x,y,z_2)| \leq M|z_1 - z_2|, \quad \forall x, y, z_1, z_2.$$

On fixe $\phi \in E$. On considère léquation :

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y,f(y))\,dy + \phi(x), \quad x \in [a,b].$$

Montrer que si $|\lambda| < C = \frac{1}{M(b-a)}$, alors cette équation a une unique solution f_λ Montrer que $\lambda \mapsto f_\lambda$ est continue sur tout intervalle fermé inclus dans $(-C, C)$.

Exercice 10. Montrer que $l^p(\mathbb{N})$ est complet pour $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 11. Théorème de Stone-Weierstrass. On rappelle le théorème de Stone-Weierstrass (cas complexe).

Théorème 3.27. *Soit (X,d) un espace compact non vide. Alors, toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.*

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et qui tendent vers 0 à l'infini. On munit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ de la norme uniforme notée $\|\cdot\|$.

(1) Montrer que $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
(2) On définit ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}\backslash\{-1\}$ par $\phi(x) = e^{2i\arctan x}$. Montrer que ϕ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Quelle est la limite de ϕ en $\pm\infty$? Expliciter la réciproque de ϕ, notée ψ.
(3) Montrer que $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ si et seulement si la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(z) = f(\psi(z))$ pour $z \neq -1$ et $\tilde{f}(-1) = 0$ est continue sur $\mathbb{U}$.
(4) Montrer que $f \mapsto \tilde{f}$ est une isométrie de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ vers les fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ nulles en -1.
(5) Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ tel que :
    (a) $\forall f \in H, f^2 \in H$,
    (b) si x et y sont deux points distincts de $\mathbb{R}$, alors il existe $f \in H$ tel que $f(x) \neq f(y)$,
    (c) pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $f \in H$ tel que $f(x) \neq 0$,
    (d) $\forall f \in H, \overline{f} \in H$.

    Montrer que H est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On pourra appliquer le théorème de Stone-Weierstrass à $\mathbb{U}$ et à l'ensemble $\tilde{H} = \{\tilde{f} + a; f \in H, a \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 12. Théorème de Riesz-Fisher. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty)$.

(1) Soit $(u_n) \in \mathcal{L}^p$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} N_p(u_n) < +\infty$. Montrer que la série $\sum |u_n(x)|$ converge presque partout. On pourra utiliser l'inégalité de Minkowski.
(2) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{L}^p$ tel que : $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et que $\sum_{n=0}^{N} u_n$ converge vers U dans $\mathcal{L}^p$.
(3) Conclure.

4. Théorie de Baire et applications

Dans tout espace topologique X, l'intersection d'une famille finie d'ouverts denses $(U_i)_{i=0,\cdots,n}$ est encore dense. En effet, soit V un ouvert non vide de X. Alors $V \cap U_0$ est encore un ouvert et il est non vide par densité de U_0. Par récurrence, on en déduit que $V \cap (\cap_{i=0}^{n} U_i)$ est un ouvert non vide. Ce résultat ne se généralise pas à des intersections infinies. Considérons $X = \mathbb{Q}$ muni de sa topologie usuelle et la famille $(X \setminus \{x\})_{x\in\mathbb{Q}}$. Cette famille est une famille dénombrable d'ouverts denses dont l'intersection est vide.

4.1. **Théorème de Baire.**

Théorème 4.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet. L'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses dans X est dense dans X.*

Démonstration. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses de X et V un ouvert non vide de X. Il s'agit de montrer que $V \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \neq \emptyset$.

Nous remarquons que $V \cap U_0$ est un ouvert non vide. Il contient ainsi une boule fermée $B_f(x_0, r_0)$, avec $r_0 \in (0, 1)$. Utilisant la densité de U_1, on constate que $B(x_0, r_0) \cap U_1$ est un ouvert non vide et contient donc une boule fermée $B_f(x_1, r_1)$, avec $r_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Ce procédé se poursuit par récurence. Supposons en effet que, pour $n \geq 1$, on ait construit $x_n \in X$ et $r_n \in \left(0, \frac{1}{1+n}\right)$ tels que $B_f(x_n, r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$. On utilise alors la densité de U_{n+1} pour voir que $U_{n+1} \cap (B(x_n, r_n))$ est un ouvert non vide et contient ainsi une boule fermée de centre x_{n+1} et de rayon $r_{n+1} \in \left(0, \frac{1}{2+n}\right)$. Examinons la suite des centres $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; elle satisfait, pour $p \geq m$:

$$d(x_m, x_p) \leq \frac{1}{m+1}.$$

Cette suite est donc de Cauchy et converge donc vers un certain $x \in X$. On peut noter que, pour tout $p \geq n$, on a : $x_p \in B_f(x_n, r_n)$ et donc $x \in B_f(x_n, r_n) \subset U_n \cap V$, pour tout $n \geq 0$.

□

Corollaire 4.2. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.*

4.2. **Applications élémentaires.**

Théorème 4.3. *Il existe une application continue et nulle part dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On considère l'espace de Banach $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme uniforme. Montrons que l'ensemble des applications continues nulle part dérivables à droite de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ contient un G_δ-dense.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$F_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{1+n}\right], \forall h \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right], \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq n \right\}.$$

Montrons que F_n est un fermé d'intérieur vide pour tout $n \geq 0$, ce qui impliquera par le théorème de Baire que $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide. Notons que toute fonction de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ qui possède une dérivée à droite finie en un certain point de $[0, 1)$ appartient à $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Montrons que F_n est fermé.

Soit $(f_p)_{p\geq 0}$ une suite d'éléments de F_n qui converge vers f dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Comme $f_p \in F_n$, on en déduit l'existence d'un point $x_p \in \left[0, 1-\frac{1}{1+n}\right]$ tel que :

$$\forall h \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right], \left|\frac{f_p(x_p+h)-f_p(x)}{h}\right| \leq n.$$

Par compacité, on peut extraire de $(x_p)_{p\geq 0}$ qui converge vers $x \in \left[0, 1-\frac{1}{1+n}\right]$.

Nous remarquons alors que pour tout $h \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right]$, $(f,x) \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est continue de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \left[0, 1-\frac{1}{n+1}\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il n'y a plus qu'à passer à la limite $p \to +\infty$.

Montrons que F_n est d'intérieur vide.

Soit $f \in F_n$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que la boule ouverte de centre f et de rayon $\varepsilon > 0$ contient un élément g qui n'est pas dans F_n.

Commençons par approcher f par un polynôme sur $[0,1]$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P telle que :

$$\|f-P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous allons perturber P par une fonction affine par morceaux très oscillante Λ d'amplitude $\frac{\varepsilon}{2}$ et de pentes $\|P'\|_\infty + n + 1$.

On pose alors $g = P + \Lambda$ et on vérifie que g convient. On remarque déjà que :

$$\|f-g\|_\infty \leq \|f-P\|_\infty + \|\Lambda\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \left[0, 1-\frac{1}{1+n}\right]$, on peut trouver $h \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right]$ tel que x et $x+h$ appartiennent tous deux à un même sous-intervalle de $[0,1]$ sur lequel la pente de Λ est constante. On écrit alors :

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| \geq \left|\frac{\Lambda(x+h)-\Lambda(x)}{h}\right| - \left|\frac{P(x+h)-P(x)}{h}\right| \geq \|P'\|_\infty + n + 1 - \|P'\|_\infty > n.$$

Ainsi, g n'appartient pas à F_n.

□

Proposition 4.4. *Un espace vectoriel à base dénombrable n'est jamais complet.*

Démonstration. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de E et $F_n = \mathrm{vect}(e_0, \cdots, e_n)$. F_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie ; il est donc fermé. Si F_n n'était pas d'intérieur vide, il existerait une boule ouverte $B(x,r)$ avec $x \in F_n$ et $r > 0$ telle que $B(x,r) \subset F_n$. Il vient d'abord $B(0,r) \subset F_n$, puis $F_n = E$, ce qui est absurde. □

4.3. **Théorème de Banach-Steinhaus.** Le théorème fondamental suivant est une conséquence directe du théorème de Baire et est parfois appelé « principe de la borne uniforme ».

Théorème 4.5. *Soient E un espace de Banach et F un evn. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F.*

On suppose que :

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty, \quad \forall x \in E.$$

Alors, on a :

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Démonstration. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$F_n = \{x \in E : \forall i \in I : \|T_i x\| \leq n\}.$$

F_n est fermé par continuité des T_i. On remarque par hypothèse que $\cup_{n\geq 1} F_n = E$. Par le théorème de Baire, il existe n_0 tel que F_{n_0} n'est pas d'intérieur vide. Cela signifie qu'il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$ ou encore :

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0, \forall i \in I, \forall z \in B(0,1).$$

Il vient :

$$r\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq n_0 + \|T_i x_0\|.$$

Il reste à prendre le supremum et à utiliser à nouveau l'hypothèse. $\square$

Corollaire 4.6. *Soient E un espace de Banach et F un evn. Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F telles que, pour tout $x \in E$, on a : $T_n x$ converge vers une certaine limite notée Tx. Alors,, on a :*

(1) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$,

(2) $T \in \mathcal{L}(E,F)$,

(3) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus. Il existe ainsi $c > 0$ telle que :

$$\|T_n x\| \leq c\|x\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in E.$$

En passant à la limite on en déduit que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq c$. En passant encore à la limite dans $\|T_n x\| \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|$, on trouve :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|.$$

$\square$

4.4. **Théorème de l'application ouverte et du graphe fermé.**

Théorème 4.7. *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjectif de E dans F. Alors, il existe $c > 0$ telle que :*

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

En particulier, T transforme un ouvert de E en un ouvert de F.

Démonstration. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

• *Étape 1.* Montrons déjà l'existence de $c > 0$ telle que :

$$B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Pour $n \geq 1$, on pose $F_n = \overline{T(B_E(0, n))}$. Comme T est surjective, on a $F = \cup_{n \geq 1} F_n$. Par le théorème de Baire, il existe n_0 tel que l'intérieur de $\overline{T(B_E(0, n_0))}$ soit non vide. Cela implique que l'intérieur de $\overline{T(B_E(0, 1))}$ est non vide. Il existe donc $y_0 \in F$ et $c > 0$ tels que :

$$B_F(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Comme $y_0 \in \overline{T(B_E(0, 1))}$, on a aussi $-y_0 \in \overline{T(B_E(0, 1))}$ et donc :

$$B_F(0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))} + \overline{T(B_E(0, 1))} \subset \overline{T(B_E(0, 2))}.$$

• *Étape 2.* Montrons à présent que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et est telle que :

$$B_F(0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))},$$

alors, on a :

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

Soit $y \in F$ tel que $\|y\| < c$. On cherche $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$ et $Tx = y$. On sait désormais que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in E$ tel que $\|y - Tz\| \leq \varepsilon$.

On prend $\varepsilon = \frac{c}{4}$ et on trouve z_1 tel que $\|z_1\| \leq \frac{1}{4}$ et :

$$\|y - Tz_1\| \leq \frac{c}{4}.$$

On réapplique le résultat à $y - Tz_1$, avec $\varepsilon = \frac{c}{4^2}$. On trouve z_2 tel que $\|z_2\| \leq \frac{1}{4^2}$ et :

$$\|y - Tz_1 - Tz_2\| \leq \frac{c}{4^2}.$$

Par récurrence, on construit une suite z_n avec $\|z_n\| \leq \frac{1}{4^n}$ et :

$$\|y - (T(z_1 + z_2 + \cdots + z_n))\| \leq \frac{c}{4^n}.$$

La suite $x_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ est convergente (absolue convergence dans un espace de Banach) ; on note x sa limite et on a $\|x\| < 1$. Par continuité de T, on a : $y = Tx$.

• *Conclusion.* Soit U un ouvert de E. Montrons que $T(U)$ est un ouvert de E. Soit $y_0 \in T(U)$ et $x_0 \in U$ tel que $y_0 = Tx_0$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$; on en tire que : $x_0 + B_E(0, r) \subset U$ et donc :

$$y_0 + T(B_E(0, r)) \subset T(U).$$

Comme $B_F(0, rc) \subset T(B_E(0, r))$, on déduit :

$$B_F(y_0, rc) \subset T(U).$$

□

Corollaire 4.8. *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijectif. Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. Il existe $c > 0$ telle que :

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

On en déduit :

$$T^{-1}(B_F(0, c)) \subset B_E(0, 1).$$

Si $y \in F$ avec $\|y\| < c$, alors $\|T^{-1}y\| < 1$. Soit $z \neq 0$. On pose $y = (c - \varepsilon)\frac{z}{\|z\|}$ et on en tire : $\|T^{-1}z\| \leq (c - \varepsilon)^{-1}\|z\|$. Ainsi, on a :

$$\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)} \leq c^{-1}.$$

□

Corollaire 4.9. *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ et complet pour ces deux normes. Alors, s'il existe $C \geq 0$ telle que $\|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$, on a l'existence de $c > 0$ telle que $\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$. En particulier, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ont équivalentes.*

Démonstration. On applique le dernier corollaire à $E = (E, \|\cdot\|_1)$, $F = (E, \|\cdot\|_2)$ et $T = \mathsf{Id}$. □

Théorème 4.10. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T une application linéaire de E dans F. On suppose que le graphe $G(T)$ de T est fermé dans $E \times F$. Alors, on a : $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. On munit E des normes $\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ et $\|x\|_2 = \|x\|_E$. On a trivialement : $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$. Le fait que $G(T)$ est fermé dans $E \times F$ implique que $(E, \|\cdot\|_1)$ est de Banach. □

4.5. **Exercices.**

Exercice 1. Soit (E,d) un espace complet non vide. Montrer que si $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pour une famille $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés de E, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans E.

Exercice 2.

(1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues sur $[0,1]$ qui converge simplement vers f. Pour $n,p,q \in \mathbb{N}$ on note
$$F_{n,p} = \bigcap_{q\geq p} \left\{ x \in [0,1]\,,\ |f_q(x) - f_p(x)| \leq \frac{1}{n+1} \right\}.$$
   (a) Montrer que pour n fixé, l'union $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p}$ n'est autre que $[0,1]$.
   (b) En appliquant le a), en déduire que $O_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,p}$ est un ouvert dense de $[0,1]$. A l'aide du théorème de Baire à nouveau, en déduire que $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est un G_δ-dense de $[0,1]$.
   (c) Expliciter ce que signifie $x \in G$ et en conclure que la limite simple f est continue en tout point de G.

(2) Montrer que la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ ne peut être limite simple d'une suite de fonctions continues.

(3) Montrer que la dérivée de toute fonction dérivable sur $[0,1]$ est continue sur un G_δ-dense de $[0,1]$. (On écrira la dérivée comme une limite simple de fonctions continues).

Exercice 3. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on pose :
$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt}\, dt.$$
Pour $n \geq 1$, on pose :
$$T_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$
On munit $\mathcal{C}_{2\pi}$ de la norme uniforme.

Montrer que $T_n : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue et en donner une expression synthétique. Calculer la norme de T_n et conclure.

Exercice 4. Soit G un espace de Banach et B un sous-ensemble de G.

(1) Rappeler pourquoi G' (muni de la norme naturelle) est un espace de Banach.
(2) On suppose que pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(B)$ est borné. Montrer que B est borné. On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus ainsi qu'un des corollaires du théorème de Hahn-Banach analytique.
(3) En déduire que toute suite faiblement convergente de G est bornée.

Exercice 5. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})$. On suppose que $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace fermé de $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

(1) Rappeler pourquoi $(\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty + \|\cdot'\|_\infty)$ est complet.

(2) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in F$:
$$\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty.$$

(3) Montrer que la boule unité fermée de $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte. On utilisera le théorème d'Ascoli.

(4) Conclusion ?

Exercice 6. Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (Tx_n) converge faiblement vers Tx. Montrer que T est continue.

Exercice 7. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit l'application $T' : F' \to E'$ par :
$$T'f(x) = f(T(x)), \quad \forall x \in E.$$

(1) Montrer que $T' \in \mathcal{L}(F', E')$. En déduire que si (x_n) tend faiblement vers x dans E, alors (Tx_n) tend faiblement vers Tx dans F.

(2) Si T est compact, montrer que si (x_n) tend faiblement vers x dans E, alors (Tx_n) tend fortement vers Tx dans F. On pourra raisonner par l'absurde.

5. Espaces de Hilbert

Les espaces hilbertiens généralisent de façon algébrique et topologique à la dimension infinie la notion d'espace euclidien (ou hermitien dans le cas complexe). Il s'agit donc d'espaces de Banach dont la norme est associée à un produit scalaire. On peut ainsi utiliser (avec quelques précautions) l'intuition géométrique de l'espace euclidien pour travailler sur ces espaces.

Dans tout ce chapitre, nous prendrons comme corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1. **Généralités.**

Nous allons définir en premier lieu l'extension purement algébrique de la notion d'espace euclidien ou hermitien à la dimension infinie, puis nous donnerons la bonne généralisation qui inclut une hypothèse topologique.

5.1.1. *Espaces préhilbertiens.*

Définition 5.1. Sur un $\mathbb{R}$- (resp. $\mathbb{C}$-) espace vectoriel H, on appelle produit scalaire toute forme i) bilinéaire (resp. sesquilinéaire) ii) symétrique (resp. hermitienne) iii) définie iv) positive. On le note usuellement $(\ ,\ )$ et les hypothèses ci-dessus s'écrivent précisément :

i): Pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{array}{rl} \text{linéarité à droite} & (x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda(x, y_1) + (x, y_2). \\ \text{(anti)linéarité à gauche} & (\lambda x_1 + x_2, y) = \overline{\lambda}(x_1, y) + (x_2, y). \end{array}$$

ii): $\forall x, y \in H,\ (y, x) = \overline{(x, y)}$.

iii): $\forall x \in H, ((x, x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.

iv): $\forall x \in H,\ (x, x) \geq 0$.

Remarque 5.2. Les conditions i)...iv) ont été écrites ci-dessus pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ avec antilinéarité par rapport à gauche. Certains auteurs mettent l'antilinéarité à droite. C'est simplement une question de convention. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\overline{\lambda} = \lambda$ de telle sorte que la sesquilinéarité se réduit à la bilinéarité et de même le caractère hermitien ii) se ramène à la symétrie.

Définition 5.3. On appelle espace préhilbertien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(\ ,\ )$.

Proposition 5.4. ***(Cauchy-Schwarz)*** *Dans un espace préhilbertien H, on a*

$$\forall x, y \in H,\ |(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| \,.$$

Démonstration. Soit $x, y \in H$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\Re\left(\lambda(x, y)\right) + |\lambda|^2 (y, y).$$

On prend $\lambda = t\overline{(x, y)}$ et cela donne

$$t^2 \left|(x, y)\right|^2 (y, y) + 2 \left|(x, y)\right|^2 t + (x, x) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le discriminant du polynôme en t doit donc être négatif ou nul, ce qui donne $\left|(x, y)\right|^4 - (x, x)(y, y) \left|(x, y)\right|^2 \leq 0$ ou encore

$$\left|(x, y)\right|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

$\square$

Corollaire 5.5. *Sur un espace préhilbertien* $(H, (\ ,\ ))$*, la quantité* $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ *définit une norme, pour laquelle le produit scalaire est continu :* $|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in H$ on a
- $|\lambda x| = (\lambda x, \lambda x)^{1/2} = |\lambda|\,(x,x)^{1/2} = |\lambda|\,\|x\|$.
- $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow ((x,x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.
- $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x)+(y,y)+2\Re(x,y)$. En utilisant Cauchy-Schwarz, $\Re(x,y) \leq |(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$, on obtient $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$.

Ainsi $\|\ \|$ est bien une norme sur H. La continuité du produit scalaire est encore une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Proposition 5.6. ***(Identité du parallélogramme)*** *Dans un espace de Hilbert* $(H, (\ ,\ ))$*, on a*

$$\forall x, y \in H,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Remarque 5.7. Interprétation géométrique de l'identité ci-dessus pour le parallélogramme de sommets $(0, x, x+y, y)$: la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés. Une autre version appelée identité de la médiane dit que la somme des carrés des médianes des deux triangles $(0, x, y)$ et $(0, x, x+y)$ est égales à la médiane (moyenne) des carrés

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y^2\|\right).$$

Définition 5.8. On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ de H est orthogonale (resp. orthonormée) si

$$\begin{aligned} &\forall i, j \in I, i \neq j,\ (x_i, x_j) = 0 \\ \text{resp.}\qquad &\forall i, j \in I,\ (x_i, x_j) = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Proposition 5.9. *Si* $(x_1, \ldots, x_N)$ *est une famille* ***finie*** *orthogonale on a*

$$\|x_1 + \cdots + x_N\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_N\|^2.$$

Démonstration. On développe le carré scalaire

$$\|x_1 + \cdots + x_N\|^2 = \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 + 2\Re\left(\sum_{1\leq i<j\leq N} (x_i, x_j)\right) = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_N\|^2.$$

□

5.1.2. *Espaces hilbertiens, théorème de la projection.*

Définition 5.10. Un espace de Hilbert (ou hilbertien) est un espace préhilbertien complet.

Comme les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées, on a immédiatement la proposition suivante :

Proposition 5.11. *Un sous-espace vectoriel* F *d'un espace de Hilbert* $(H, (\ ,\ ))$*, muni du produit scalaire restreint à* F*, est un espace de Hilbert si et seulement si il est fermé dans* H.

Ainsi, les sous-espaces de Hilbert sont les sous-espaces vectoriels fermés.

Remarque 5.12. En dimension finie, tout espace préhilbertien est un espace de Hilbert et tout sous-espace vectoriel est fermé. Cela n'est plus vrai en dimension infinie.

Le théorème qui suit bien que très intuitif en dimension finie repose essentiellement sur la propriété de complétude. C'est le résultat fondamental associé à la structure hilbertienne. À partir de là, on démontre tout le reste.

Théorème 5.13. ***(de la projection)*** *Si C est un convexe fermé d'un espace de Hilbert H, on a les résultats suivants :*

a): *Pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_C \in C$ tel que*

$$\|x - x_C\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| .$$

On appelle x_C projection de x sur C et on note $x_C = P_C(x)$.

b): *Le point $x_C = P_C(x)$ est caractérisé par*

$$\forall y \in C,\ \Re\left(x - x_C, y - x_C\right) \leq 0.$$

c): *Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H, la caractérisation s'écrit*

$$\forall y \in C, (x - x_C, y) = 0 \qquad (x - x_C \text{ orthogonal à } C).$$

d): *La projection P_C est une contraction $H \to C$*

$$\forall x, y \in H, \|P_C(y) - P_C(x)\| \leq \|x - y\| .$$

Démonstration. a)**Unicité :** Si $x_C^1 = x_C^2$ sont des minima pour la fonction $\|x - .\| \in \mathbb{R}$ définie sur C, alors comme C est convexe le milieu $\frac{x_C^1 + x_C^2}{2}$ appartient à C et on a

$$\left\|x_C^1 - x_C^2\right\|^2 = 2\left(\left\|x - x_C^1\right\|^2 + \left\|x - x_C^2\right\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{x_C^1 + x_C^2}{2}\right\|^2 \leq 0.$$

On a nécessairement $x_C^2 = x_C^1$.

Existence : Soit $x \in H$, la fonction $C \ni y \to \|x - y\| \in \mathbb{R}$ est minorée par 0 donc admet une borne inférieure ≥ 0. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C minimisante, i.e. telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| .$$

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, l'identité du parallélogramme 5.6 donne

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_n\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\
&= 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - 4\inf_{y \in C}\|x - y\|^2 \qquad \text{car } \frac{y_n + y_m}{2} \in C.
\end{aligned}$$

Donc pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|y_n - y_m\| \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et, comme C est un fermé de H qui est complet, elle admet une limite dans C. On note $x_C = \lim_{n \to \infty} y_n$ et on a

$$x_C \in C \quad \text{et} \quad \|x - x_C\| = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| .$$

b) Pour $y \in C$, on considère la fonction $[0,1] \ni t \to y_t \in C$ donnée par $y_t = (1-t)x_C + ty$. La quantité $\|x - y_t\|^2$ est un polynôme en t,

$$\|x-y_t\|^2 = \|x-x_C\|^2 + 2t\Re\,(x-x_C, x_C - y) + t^2\,\|x_C - y\|^2\,. \tag{5.1}$$

$\Rightarrow$ Si x_C minimise $\{\|x-y\|\,,\ y \in C\}$, alors on doit avoir

$$\forall t \in [0,1],\ \|x-y_t\|^2 \geq \|x-x_C\|^2$$

et en particulier cela entraîne :

$$2t\Re\,(x-x_C, x_C-y) + t^2\,\|x_C-y\|^2 \geq 0. \tag{5.2}$$

Cela implique :

$$\Re\,(x-x_C, y-x_C) \leq 0.$$

$\Leftarrow$ Si l'inégalité ci-dessus est vérifiée alors l'expression (5.1) de $\|x-y\|^2 = \|x-y_1\|^2$ donne

$$\|x-x_C\|^2 \leq \|x-y\|^2\,.$$

c) Si C est un sous-espace vectoriel alors $y + x_C$ appartient à C quand $y \in C$. Le critère du b) devient alors :

$$\forall y \in C,\ \Re\,(x-x_C, y) \leq 0.$$

Or, si $y \in C$, on a aussi $-y \in C$, d'où la reformulation :

$$\forall y \in C,\ \Re\,(x-x_C, y) = 0.$$

Pour le cas réel, cela donne la conclusion. Pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on remarque que si $y \in C$, on a aussi $iy \in C$; il vient :

$$\forall y \in C,\ \Im\,(x-x_C, y) = 0.$$

Cela s'écrit tout simplement : $(x-x_C, y) = 0,\ \forall y \in C$.
d) Pour $x, y \in H$ on note $x_C = P_C(x)$, $y_C = P_C(y)$, $\Delta x = x - x_C$ et $\Delta y = y - y_C$. En écrivant $x = x_C + \Delta x$ et $y = y_C + \Delta y$ on obtient

$$\|y-x\|^2 = \|y_C - x_C\|^2 + \|\Delta y - \Delta x\|^2 + 2\Re\,(y_C - x_C, \Delta y - \Delta x)\,.$$

Or le dernier terme vaut

$$2\Re\,(y_C - x_C, \Delta y - \Delta x) = 2\Re\,(y_C - x_C, y - y_C) - 2\Re\,(y_C - x_C, x - x_C)\,.$$

C'est une somme de deux nombres positifs ou nuls. $\square$

Pour terminer nous insistons encore sur le fait que la structure d'espace de Hilbert comme celle d'espace de Banach, combine des structures algébriques et topologiques. Par exemple, on a vu qu'un sous-espace de Hilbert est nécessairement fermé. Ainsi si on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert H, le sous-espace de Hilbert engendré, i.e. le plus petit sous-espace de Hilbert contenant tous les x_i, doit contenir l'espace vectoriel engendré et être fermé. C'est en fait l'adhérence de l'espace vectoriel engendré. On rappelle que $\mathsf{Vect}(x_i,\ i \in I)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs x_i

$$\mathsf{Vect}(x_i,\ i \in I) = \Big\{ \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} \alpha_i x_i \Big\},$$

tandis que le sous-espace de Hilbert engendré peut contenir des séries (sommes ou combinaisons linéaires infinies) convergentes. Cela nous amène à distinguer ces deux notions par les notations.

Définition 5.14. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteur d'un espace de Hilbert H, on note $\mathsf{Vect}(x_i,\ i \in I)$ l'espace vectoriel engendré et $\mathsf{Hilb}\,(x_i,\ i \in I)$ le sous-espace de Hilbert engendré.

5.2. **Applications du théorème de la projection.** Dorénavant, on travaille avec un espace de Hilbert H sur $\mathbb{K}$ dont le produit scalaire est noté $(\ ,\ )$.

5.2.1. *Sous-espace orthogonal.*

Définition 5.15. Si A est une partie de H, on appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in H,\ \forall a \in A, (a, x) = 0\}\,.$$

Proposition 5.16. *Pour toute partie A de H, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.*

Démonstration. Pour $a \in A$, on a $a^\perp = \ker[(a, .)]$. Or la forme linéaire $H \ni x \to (a, x) \in \mathbb{K}$ est continue. Ainsi, $a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé. On en déduit que $A^\perp = \cap_{a\in A} a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. □

Proposition 5.17. *Pour deux parties A et B de H on a*

- **1):** $(A \subset B) \Rightarrow \left(B^\perp \subset A^\perp\right)$.
- **2):** $A^\perp = \left(\overline{A}\right)^\perp = (\mathsf{Vect}A)^\perp = (\mathsf{Hilb}A)^\perp$.

Démonstration. 1) Pour $A \subset B$, on a tout simplement

$$B^\perp = \cap_{a\in B} a^\perp \subset \cap_{a\in A} a^\perp = A^\perp.$$

2) Comme $\mathsf{Hilb}A = \overline{\mathsf{Vect}A}$, il suffit de montrer les deux premières égalités.

- $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$: Cela vient du 1) et de $A \subset \overline{A}$.
  $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$: Si $x \in A^\perp$ et $a \in \overline{A}$, on peut écrire $a = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$ avec $a_n \in A$. On a alors $(a, x) = \lim_{n\to\infty}(a_n, x) = 0$. Cela pour tout $a \in \overline{A}$ et pour tout $x \in \overline{A}^\perp$.
- $(\mathsf{Vect}A)^\perp \subset A^\perp$: Cela vient du 1) et de $A \subset (\mathsf{Vect}A)$.
  $A^\perp \subset (\mathsf{Vect}A)^\perp$: Soit $x \in A^\perp$ et soit $y = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i$ un élément de $\mathsf{Vect}A$, on a $(y, x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a_i, x) = 0$. Comme cela est vrai pour tout $y \in \mathsf{Vect}A$, on en déduit $x \in (\mathsf{Vect}A)^\perp$.

□

Proposition 5.18. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, on a les propriétés suivantes :*

- **a):** *$H = F \oplus F^\perp$ et P_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (projection orthogonale sur F).*
- **b):** *Si $F \neq \{0\}$ alors $\|P_F\| = 1$.*
- **c):** $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Démonstration. a) Le théorème de la projection (5.13) permet de définir la projection P_F sur le convexe fermé F. Pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par

$$\forall y \in F,\ (y, x - P_F(x)) = 0,$$

c'est à dire $x - P_F(x) \in F^\perp$. En écrivant $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ on vérifie que $H = F + F^\perp$. De plus, si $x \in F \cap F^\perp$, alors on a $(\underset{\in F}{x}, \underset{\in F^\perp}{x}) = 0$ et donc $x = 0$. On a bien $H = F \oplus F^\perp$. Enfin, l'unique décomposition $x = \underset{\in F}{P_F(x)} + (x - \underset{\in F^\perp}{P_F(x)})$ nous assure que $P_F(x)$ est bien la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

b) Si $F \neq \{0\}$, on prend $x \in F$ non nul et la norme de l'application linéaire P_F est supérieure à $\frac{\|P_F(x)\|}{\|x\|} = 1$. De plus, comme on sait que P_F est une contraction (cf. Théorème de la projection (5.13) d)), sa norme doit être inférieure ou égale à 1. On a donc $\|P_F\| = 1$.

c) La définition de l'orthogonal 5.15 donne tout de suite $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$. Pour l'inclusion inverse on prend $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$ et on écrit

$$\|x - P_F(x)\|^2 = \left(\underset{\in F^\perp}{x - P_F(x)}, \underset{\in \left(F^\perp\right)^\perp}{x}\right) - \left(\underset{\in F^\perp}{x - P_F(x)}, \underset{\in F}{P_F(x)}\right) = 0.$$

On en déduit $x = P_F(x) \in F$. □

Corollaire 5.19. *Pour une partie A de H, on a $(A^\perp)^\perp = \mathsf{Hilb}A$.*

Démonstration. On a vu dans la Proposition 5.17, l'égalité $A^\perp = (\mathsf{Hilb}A)^\perp$. Comme $\mathsf{Hilb}A$ est un sous-espace vectoriel fermé on a

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left((\mathsf{Hilb}A)^\perp\right)^\perp = \mathsf{Hilb}A.$$

□

Corollaire 5.20. *Un sous-espace vectoriel de H est dense si et seulement si son orthogonal est* $\{0\}$.

Démonstration. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel V de H n'est autre que $\overline{V} = \mathsf{Hilb}V$. Ainsi V est dense si et seulement si $\mathsf{Hilb}V = H$ c'est à dire si et seulement si $V^\perp = (\mathsf{Hilb}V)^\perp = \{0\}$. □

5.2.2. *Théorème de représentation de Riesz.* Pour tout $f \in H$, la forme linéaire $H \ni x \to (f, x) \in \mathbb{K}$ est continue. Le résultat suivant donne la réciproque.

Théorème 5.21. ***(de représentation Riesz)*** *Pour toute forme linéaire continue l sur H, il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\forall x \in H,\ l(x) = (f, x).$$

Démonstration. Soit l une forme linéaire continue sur H. On note $F = \ker l$. C'est un sous-espace fermé puisque l est continue.

Existence : On distingue 2 cas : 1) Si $F^\perp = \{0\}$ alors on a $F = (F^\perp)^\perp = H$, $l = 0$ et on prend $f = 0$. 2) Si $F^\perp \neq \{0\}$ alors on prend $u \in F^\perp$ de norme 1. On a $l(u) \neq 0$ et pour $x \in H$ on a $x - \frac{l(x)}{l(u)}u \in \ker l = F$. Le produit scalaire $(u, x - \frac{l(x)}{l(u)}u)$ est donc nul, ce qui donne

$$\forall x \in H, l(x) = l(x)(u, u) = l(u)(u, x) = (f, x)$$

en prenant $f = \overline{l(u)}u$.

Unicité : Soit f_1 et f_2 deux vecteurs de H qui vérifient : $\forall x \in H, (f_1, x) = l(x) = (f_2, x)$. On obtient en prenant $x = f_1 - f_2$,

$$(f_1 - f_2, f_1 - f_2) = l(f_1 - f_2) - l(f_1 - f_2) = 0$$

d'où l'on tire $f_1 = f_2$. $\square$

Remarque 5.22. Ce théorème nous dit que le dual topologique H' d'un espace de Hilbert H s'identifie à H. Attention : l'identification dépend du choix du produit scalaire.

5.2.3. *Bases hilbertiennes.*

Définition 5.23. Dans un espace de Hilbert H, on appelle base hilbertienne un système orthonormé $(e_i)_{i\in I}$ tel que $\mathsf{Hilb}(e_i,\ i\in I) = H$.

Remarque 5.24. Attention : Une base hilbertienne n'est pas une base au sens algébrique. Pour récupérer tout l'espace on ne se contente pas de faire des combinaisons linéaires finies. On passe à la limite aussi.

Nous allons étudier l'existence d'une base hilbertienne dans le cas précis où H est séparable et nous commençons par un lemme portant sur la séparabilité.

Lemme 5.25. *Un espace de Hilbert H est séparable si et seulement si il existe une famille dénombrable* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $H = \mathsf{Hilb}\,(x_n, n\in\mathbb{N})$.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si H est séparable une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans H vérifie $H = \mathsf{Hilb}\,(x_n, n\in\mathbb{N})$
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathsf{Hilb}\,(x_n,\ n\in\mathbb{N}) = H$ c'est à dire $\mathsf{Vect}\,(x_n,\ n\in\mathbb{N})$ dense dans H. On définit par récurrence la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et les sous-espaces vectoriels $V_k = \mathsf{Vect}\,(x_0, x_1, \ldots, x_{n_k})$ tels que $\dim V_k = k+1$ et $x_{n_k}\in V_k\setminus V_{k-1}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, le sous-ensemble $+_{i=0}^{n_k}\mathbb{Q}x_i$ est dénombrable ($\mathbb{Q}$ est dénombrable) et dense dans V_k. On prend alors $D = \cup_{k\in\mathbb{N}}\left(+_{i=0}^{n_k}\mathbb{Q}x_i\right)$. Il est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables et il reste à vérifier qu'il est dense. Soit $x\in H$ et soit $\varepsilon>0$. Comme $\mathsf{Vect}\,(x_n, n\in\mathbb{N}) = \cup_{k\in\mathbb{N}}V_k$ est dense dans H il existe g_ε appartenant à un certain V_{k_ε} telle que $\|f-g_\varepsilon\|\le\varepsilon/2$. Maintenant comme $+_{i=0}^{n_{k_\varepsilon}}\mathbb{Q}x_i$ est dense dans V_{k_ε}, on peut trouver $h_\varepsilon\in +_{i=0}^{n_{k_\varepsilon}}\mathbb{Q}x_i$ tel que $\|g_\varepsilon-h_\varepsilon\|\le\varepsilon/2$. On a trouvé $h_\varepsilon\in D$ tel que $\|f-h_\varepsilon\|\le\varepsilon$. $\square$

Remarque 5.26. **a):** L'espace de suites

$$l^2(\mathbb{N};\mathbb{K}) = \left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ \sum_{k\in\mathbb{N}}|x_k|^2<+\infty\right\}$$

muni du produit scalaire $(x,y)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\overline{x_k}y_k$ est un espace de Hilbert séparable. (Il en est de même de $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{K})$.) En effet, on considère la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$ donnée par $e_{n,k}=\delta_{nk}$. Alors l'espace vectoriel engendré $\mathsf{Vect}\,(e_n,\ n\in\mathbb{N})$ n'est autre que l'espace des suites nulles en dehors d'un nombre fini d'indices (ici ce n'est rien d'autre que $\mathbb{K}[X]$). Il est dense dans $l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$ et donc $\mathsf{Hilb}\,(e_n,\ n\in\mathbb{N}) = l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$ est séparable. En fait, comme le système $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormé, c'est même une base hilbertienne de $l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$.

b): Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^2(\Omega,dx)$ ("fonctions" L^2 à valeurs dans $\mathbb{K}$) muni du produit scalaire $(f,g)=\int_\Omega\overline{f(x)}g(x)\,dx$ est séparable :
L'ouvert Ω peut s'écrire comme union d'une suite croissante de compacts $\Omega=\cup_{n\in\mathbb{N}}K_n$, $K_n\subset K_{n+1}\subset\Omega$. Si f est un élément quelconque de $L^2(\Omega,\ dx)$, la suite de terme $1_{K_n}(x)f(x)$ converge vers f dans $L^2(\Omega,\ dx)$. Pour $\varepsilon>0$, on peut donc trouver n_ε tel que $\left\|f-1_{K_{n_\varepsilon}}(x)f(x)\right\|_{L^2(\Omega)}\le\frac{\varepsilon}{3}$. De plus on sait (cf. Cours d'Intégration) que $\mathcal{C}^0\left(K_{n_\varepsilon}\right)$ est dense dans $L^2(K_{n_\varepsilon},\ dx)$ et on peut trouver une fonction $\varphi_\varepsilon\in\mathcal{C}^0(K_{n_\varepsilon})$ telle que $\|f-\varphi_\varepsilon\|_{L^2(K_{n_\varepsilon})}\le\frac{\varepsilon}{3}$. Le théorème de Stone-Weierstrass nous dit qu'on peut approcher

φ_ε par des polynômes en norme de la convergence uniforme. Or comme la mesure $|K_{n_\varepsilon}| = \int_{K_{n_\varepsilon}} 1\, dx$ est finie, l'estimation

$$\forall \psi \in \mathcal{C}^0(K_{n_\varepsilon}),\ \|\psi\|_{L^2}^2 = \int_{K_{n_\varepsilon}} |\psi(x)|^2\ dx \leq |K_{n_\varepsilon}|\, \|\psi\|_\infty^2$$

nous dit qu'on peut trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (et dans le cas complexe $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}]$) tel que

$$\|\varphi_\varepsilon - P\|_{L^2(K_{n_\varepsilon})} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors $\left\| f - 1_{K_{n_\varepsilon}}(x)P(x)\right\| \leq \varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$.
Autrement dit, l'espace vectoriel engendré par l'ensemble dénombrable de fonctions

$$\begin{array}{ll} (\mathbb{K} = \mathbb{R}) & \{1_{K_n}(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d},\ n, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{N}\} \\ (\mathbb{K} = \mathbb{C}) & \left\{1_{K_n}(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d} \overline{x_1}^{\beta_1} \ldots \overline{x_d}^{\beta_d},\ n, \alpha_1, \ldots, \alpha_d, \beta_1, \ldots, \beta_d \in \mathbb{N}\right\} \end{array}$$

est dense dans $L^2(\Omega,\ dx)$.

Théorème 5.27. *Pour un espace de Hilbert H séparable on a les résultats suivants :*

1): *H admet une base hilbertienne dénombrable.*

2): *Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H alors on a*

a): *$H = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty\right\}$ et pour $x \in H$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et donnée par $x_n = (e_n, x)$.*

b): *Pour $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \in H$ et $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n e_n \in H$, le Théorème de Pythagore se généralise en*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$$

et on a l'identité de Parseval

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{x_n} y_n.$$

Remarque 5.28. La deuxième partie du théorème nous dit qu'en fait l'application $H \ni x \to (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ donnée par $x_n = (e_n, x)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. Ainsi il n'y a qu'un seul espace de Hilbert séparable à isomorphisme près.

Démonstration. 1) Si H est séparable, on a $H = \mathsf{Hilb}(x_n, n \in \mathbb{N})$ et on considère comme dans la démonstration du Lemme 5.25 la suite de sous-espaces de dimension finie $V_k = \mathsf{Vect}\,(x_0, x_1, \ldots, x_{n_k})$. On utilise un procédé d'orthogonalisation de Schmidt : Pour $k = 0$, on prend $e_0 = \frac{x_{n_0}}{\|x_{n_0}\|}$ le premier vecteur non nul normalisé à 1. Une fois $e_0, \ldots, e_k$ construits, on introduit le vecteur

$$\tilde{e}_{k+1} = x_{n_{k+1}} - \sum_{i=1}^{k} (e_i, x_{n_{k+1}}) e_i$$

qui est non nul puisque $x_{n_{k+1}}$ n'appartient pas à

$$\mathsf{Vect}\left(x_0, \ldots, x_{n_{k+1}-1}\right) = \mathsf{Vect}\,(e_0, \ldots, e_k)$$

puis on le normalise à 1 en prenant

$$e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|}.$$

On obtient ainsi une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $(e_k, e_{k'}) = \delta_{kk'}$ et $\mathsf{Hilb}\,(e_k, k \in \mathbb{N}) = \mathsf{Hilb}\,(x_n, n \in \mathbb{N}) = H$.

2) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et soit $x \in H$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (e_n, x)$ et pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n e_n$. On a alors

$$\begin{aligned} \|x - S_N\|^2 &= \left\| x - \sum_{n=0}^{N} x_n e_n \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 - 2\Re\left(x, \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\right) \\ &= |x|^2 - \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 . \end{aligned}$$

On en déduit pour tout $N \in \mathbb{N}$ la majoration $\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 \leq \|x\|^2$ de telle sorte que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$. Maintenant pour $N > M$ on utilise le théorème de Pythagore fini (Proposition 5.9) pour calculer

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |x_n|^2 .$$

Avec la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ N_ε, tel que $\|S_N - S_M\| \leq \varepsilon$ pour $N, M \geq N_\varepsilon$. Ainsi, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H qui est complet. Elle admet une limite qu'on note pour l'instant $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. En utilisant la continuité du produit scalaire on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(e_m, x - S) = (e_m, x) - \left(e_m, \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n\right) = x_m - x_m = 0.$$

Ainsi $x - S$ est orthogonal à $H = \mathsf{Hilb}(e_m, m \in \mathbb{N})$. Il est donc nul, $x = S = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. Enfin, comme $\lim_{N\to\infty} S_N = x$, la première relation nous donne $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$ et l'identité de Parseval s'obtient facilement par passage à la limite. □

5.3. **Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts.** Dans cette partie, H désigne un espace de Hilbert séparable. On considère $T \in \mathcal{L}(H)$.

5.3.1. *Spectre.*

Définition 5.29. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de T, noté $\sigma(T)$ si $T - \lambda\mathsf{Id}$ n'est pas inversible.

Lemme 5.30. *$\sigma(T)$ est fermé dans $\mathbb{C}$.*

5.3.2. *Adjoint.*

Proposition 5.31. *Il existe un unique opérateur noté $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que :*

$$(Tx, y) = (x, T^* y), \quad \forall x, y \in H.$$

Définition 5.32. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $T^* = T$.

Proposition 5.33. *Si T est auto-adjoint, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $T - iy\mathsf{Id}$ est inversible dès que $y \in \mathbb{R}^*$. Pour cela, on estime (en utilisant que T est auto-adjoint) :

$$\|(T - iy\mathsf{Id})u\|^2 = \|Tu\|^2 + y^2\|u\|^2.$$

En particulier, on en tire que :

$$\|(T - iy\mathsf{Id})u\|^2 \geq y^2\|u\|^2.$$

$T - iy\mathsf{Id}$ est donc injectif. Pour montrer la surjectivité, nous allons montrer que son image est fermée et dense dans H. Soit v dans l'orthogonal de l'image de $T - iy\mathsf{Id}$. On a pour tout $u \in H$:

$$((T - iy\mathsf{Id})u, v) = 0$$

et donc :

$$(u, (T + iy\mathsf{Id})v) = 0,$$

d'où :

$$(T + iy\mathsf{Id})v = 0$$

et ainsi $v = 0$.

Pour la fermeture de l'image, il suffit de considérer une suite de Cauchy.

□

Proposition 5.34. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose :*

$$m = \inf_{u \in H, \|u\|=1} (Tu, u), \quad M = \sup_{u \in H, \|u\|=1} (Tu, u).$$

Alors, on a : $\sigma(T) \subset [m, M]$ et $m, M \in \sigma(T)$.

Démonstration. Quitte à changer T en $-T$, on peut se contenter de montrer que si $\lambda > M$, alors $T - \lambda\mathsf{Id}$ est inversible et que $M \in \sigma(T)$. On remarque que :

$$((\lambda\mathsf{Id} - T)u, u) \geq (\lambda - M)\|u\|^2.$$

Un argument déjà utilisé montre que $\lambda\mathsf{Id} - T$ est inversible.

Introduisons alors $a(u, v) = ((M\mathsf{Id} - T)u, v)$. a est une forme sesquilinéaire positive. Elle donne donc lieu à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|((M\mathsf{Id} - T)u, v)| \leq ((M\mathsf{Id} - T)u, u)^{1/2}((M\mathsf{Id} - T)v, v)^{1/2}.$$

En prenant $v = (M\mathsf{Id} - T)u$, on trouve :

$$\|(M\mathsf{Id} - T)u\|^2 \leq C\|(M\mathsf{Id} - T)u\|((M\mathsf{Id} - T)u, u)^{1/2}$$

d'où :

$$\|(M\mathsf{Id} - T)u\| \leq C((M\mathsf{Id} - T)u, u)^{1/2}.$$

En considérant une suite minimisante (u_n) ($\|u_n\| = 1$), on trouve :

$$(M\mathsf{Id} - T)u_n \to 0.$$

Si M n'était pas dans le spectre, on aurait $(M\mathsf{Id} - T)$ inversible et continu (par le théorème des isomorphismes de Banach) et ainsi :

$$u_n \to 0.$$

□

Corollaire 5.35. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.*

5.3.3. *Opérateurs compacts.*

Définition 5.36. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact si l'image par T de la boule unité est relativement compacte.

Lemme 5.37. *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Lemme 5.38. *Toute suite faiblement convergente est bornée.*

Proposition 5.39. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *T est compact.*

(2) *L'image par T de toute suite bornée contient une sous-suite convergente.*

(3) *T transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente.*

Proposition 5.40. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors les éléments du spectre non nuls sont des valeurs propres.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \sigma(T)$ avec $\lambda \neq 0$. Si λ n'est pas une valeur propre, on déduit que $\mathsf{Id} - \lambda^{-1}T$ est injective. Comme T est auto-adjoint, cela implique que $\mathsf{Id} - \lambda^{-1}T$ est d'image dense dans H. Montrons alors que l'image de $\mathsf{Id} - \lambda^{-1}T$ est fermée. Cela entrainera la surjectivité de $\mathsf{Id} - \lambda^{-1}T$. Soit u_n une suite telle que :

$$(\mathsf{Id} - \lambda^{-1}T)u_n \to v.$$

Si (u_n) est bornée, par compacité de T, on peut extraire une sous-suite de (Tu_n) qui converge vers un certain w. On en déduit la convergence d'une sous-suite de (u_n) vers $u := v + \lambda^{-1}w$. Si (u_n) n'est pas bornée, on considère la suite bornée $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ et on trouve :

$$(\mathsf{Id} - \lambda^{-1}T)v_n \to 0.$$

On en déduit qu'une sous-suite de (v_n) est convergente vers un certain v qui est de norme 1. v est dans le noyau de $(\mathsf{Id} - \lambda^{-1}T)$; c'est impossible. □

5.3.4. *Théorème spectral.* Nous pouvons dès lors énoncer le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts.

Théorème 5.41. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact.*

(1) *Les valeurs propres non nulles de T forment un ensemble fini ou une suite de réels qui tend vers 0.*

(2) *Si μ est une valeur propre non nulle, l'espace $E_\mu = \ker(T - \mu\mathsf{Id})$ est de dimension finie.*

(3) *On a :* $H = \bigoplus_{j=1}^{+\infty} E_{\mu_j} \oplus E_0$.

(4) *Si* $\dim H = +\infty$*, on a :* $\sigma(T) = \{0\} \cup_{j=1}^{+\infty} \{\mu_j\}$*. Si* $\dim H < \infty$*, le spectre de* T *est constitué des valeurs propres.*

Démonstration. Remarquons que les espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Remarquons aussi que si μ est une valeur propre non nulle, la boule unité B de E_μ vérifie :

$$\mu^{-1}T(B) = B.$$

B est donc relativement compact dans H et donc dans E_μ qui un sev fermé de H.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il y a au plus un nombre fini de valeurs propres μ telles que $|\mu| \geq \varepsilon$. Si ce n'était pas le cas, on aurait une famille infinie μ_{k_j} de valeurs propres telles que $|\mu_{k_j}| \geq \varepsilon$. Si x_{k_j} est un vecteur propre de norme 1 associé à μ_{k_j}, on aurait :

$$\|Tx_{k_j} - Tx_{k_l}\|^2 = \mu_{k_j}^2 + \mu_{k_l}^2 \geq 2\varepsilon^2.$$

Cela contredit la compacité de T. Il reste à prendre $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et la finitude ou la dénombrabilité des valeurs propres en découle aisément. Soit $V = \oplus_{j=1}^{+\infty} E_{\mu_j}$. L'orthogonal N de V est stable par T. T induit donc un opérateur T' de N dans N. T' est encore auto-adjoint et compact. La seule valeur propre de T' est 0. On en conclut que le spectre de T' est réduit à 0 et que T' est nul et donc que T' est nul. On en conclut que $N = \ker T$.

□

5.4. **Exercices.**

Exercice 1. Identités de polarisation : Soit $(E, (\ , \ ))$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\| \ \|$ la norme associée.

(1) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que l'on a pour tout $x, y \in E$

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[+\left\|+x+y\right\|^2 - \left\|-x+y\right\|^2\right]$$

(2) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que l'on a pour tout $x, y \in E$

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[+\left\|+x+y\right\|^2 - \left\|-x+y\right\|^2 + i\left\|ix+y\right\|^2 - i\left\|-ix+y\right\|^2\right].$$

(3) En déduire que l'on peut toujours retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

Exercice 2. On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\| \ \|$ vérifiant l'identité de la médiane :

$$\forall x, y \in E, \left\|x+y\right\|^2 + \left\|x-y\right\|^2 = 2\left\|x\right\|^2 + 2\left\|y\right\|^2.$$

L'objectif est de montrer que E muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire et, compte tenu de l'exercice précédent, on pose

$$\forall x, y \in E, (x, y) = \frac{1}{4}\left[\left\|x+y\right\|^2 - \left\|x-y\right\|^2\right].$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

(1) Montrer que pour tout $x, y \in E$ on a $(x, y) = (y, x)$ et $(x, x) = \|x\|^2$.

(2) Montrer que pour $x_1, x_2, y \in E$ on a $(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) = 0$ (On utilisera l'identité de la médiane avec les paires $(x_1 + y, x_2 + y)$ et $(x_1 - y, x_2 - y)$).

(3) Montrer, en utilisant b), que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a $(rx, y) = r(x, y)$ et, en utilisant un argument de continuité, que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.

(4) En déduire que (x, y) définit bien un produit scalaire sur E qui donne la norme $\| \ \|$.

(5) Traiter de même le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 3. Séries de Fourier : On identifie l'ensemble des fonctions continues complexes périodiques de période 2π avec l'ensemble des fonctions continues complexes sur le cercle unité $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 = 1\right\}$. On note $\mathcal{C}^0(S^1; \mathbb{C})$. On munit $L^2(S^1, \frac{d\theta}{2\pi})$ du produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(1) Montrer que $L^2(S^1, \frac{d\theta}{2\pi})$ muni de $(\cdot, \cdot)$ est un espace de Hilbert.

(2) Vérifier que $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormé de $L^2(S^1)$.

(3) En appliquant un corollaire de Stone-Weierstrass, montrer que l'espace des polynômes trigonométriques que $Vect\left\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ est dense dans $L^2(S^1)$. En déduire que $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(S^1)$.

(4) En déduire que pour tout $f \in L^2(S^1)$, on a $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{in\theta}$ dans $L^2(S^1)$ en posant $f_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$. Montrer de plus l'identité de Parseval

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 .$$

Exercice 4. Polynômes de Legendre : Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit la forme bilinéaire :

$$(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

(1) Vérifier que muni de ce produit scalaire $\mathbb{R}[X]$ est un espace préhilbertien.

(2) Est-ce un espace de Hilbert ? Quel est son complété ?

(3) En appliquant à la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, montrer qu'il existe une et une seule famille orthonormée P_n dans laquelle P_n est exactement de degré n et vérifie $(P_n, X_n) > 0$. Vérifier que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base algébrique de $\mathbb{R}[X]$.

(4) En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2([-1, 1], dx)$.

(5) On définit le polynôme Q_n par

$$Q_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n.$$

Montrer que Q_n est de degré n et a n racines simples dans $(-1, 1)$. Montrer que Q_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n et en déduire $Q_n = \lambda_n P_n$. Calculer (Q_n, Q_n) et en déduire λ_n. Calculer $Q(-1)$ et $Q(1)$.

(6) Établir les relations

$$\forall n \geq 2,\ nQ_n = (2n - 1)XQ_{n-1} - (n - 1)Q_{n-2},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}[(1 - t^2)P_n'(t)] + n(n + 1)P_n(t) = 0.$$

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que toute suite faiblement convergente est bornée.

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $x \in H$ on a :

$$\|x\| = \max_{f\in H', \|f\|\leq 1} |f(x)|.$$

Exercice 7. Soit H un espace de Hilbert séparable. Montrer que de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Exercice 8. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue de H dans H, notée T^*, telle que :

$$(Tu, v) = (u, T^*v), \quad \forall u, v \in H.$$

(2) Montrer que si (u_n) converge faiblement vers u, alors (Tu_n) converge faiblement vers Tu. Que se passe-t-il si T est supposé compact ?

(3) Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ transforme la convergence faible en convergence forte, alors T est compact.

(4) Application. Soient $X \subset \mathbb{R}^{p_1}$ et $Y \subset \mathbb{R}^{p_2}$ deux ouverts non vides. Soit $k \in L^2(X \times Y)$. Pour tout $f \in L^2(X)$, on pose :

$$Tf(x) = \int_{X \times Y} k(x,y)f(y)\,dy.$$

Montrer que T est bien définie de $L^2(Y)$ vers $L^2(X)$ et qu'elle est linéaire continue. On donnera un majorant de sa norme. En adaptant la question précédente et en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer que T est compacte.

Exercice 9. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$ et soit $f \in H(\mathbb{D})$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. On dit que $f \in H^2(\mathbb{D})$ lorsque $f \in H(\mathbb{D})$ vérifie : $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2 < +\infty$ où $f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, on pose :

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2 \right)^{1/2}.$$

(1) Montrer que l'application $T : f \in H^2(\mathbb{D}) \to l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui à f associe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une isométrie. Pour la surjectivité, on remarquera qu'une suite dans $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est bornée.

(2) Que peut-on dire de $(H^2(\mathbb{D}), \|\cdot\|)$?

(3) Montrons que pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Exercice 10. Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

(1) Montrer que si T est Hilbert-Schmidt pour une base hilbertienne, il l'est pour toutes. On pourra montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^* f_k\|^2$$

pour toute base hilbertienne $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en utilisant la formule de Parseval. Cette valeur commune est notée $\|T\|_{HS}^2$.

(2) Vérifier que $\|\cdot\|_{HS}$ est une norme associée à un produit scalaire qui fait de l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt un espace de Hilbert.

(3) Montrer que si T est Hilbert-Schmidt, son adjoint l'est aussi.

(4) Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

(5) Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. On pourra montrer que T transforme la convergence faible en convergence forte.

(6) Relier la norme Hilbert-Schmidt de T à ses valeurs propres (utiliser le résultat d'un exercice du chapitre 1).

(7) *Exemple.* Soit $k \in L^2([0,1]^2)$. Pour $f \in L^2([0,1])$, on pose :

$$Tf(x) = \int_{[0,1]^2} k(x,y)f(y)\,dy.$$

Montrer que T est Hilbert-Schmidt et calculer sa norme.

Exercice 11. Projections alternées : Soit H un espace de Hilbert et C_1, C_2 deux convexes fermés tels que $0 \in \mathring{C_1} \cap C_2$. Si C est un convexe, on notera P_C la projection sur C. Notons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{B(0,\delta)} \subset C_1$.

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite :

$$x_{n+1} = P_{C_1}P_{C_2}(x_n),$$

avec $x_0 \in H$.

(1) **Préliminaires.**

(a) Montrer que, pour tout $y \in C_1 \cup C_2$ et $j \in \{1,2\}$, on a :

$$\|P_{C_j}y\| \leq \|y\|.$$

(b) Montrer que, pour $x \in C_1 \cap C_2$,

$$\|x_{n+1} - x\| \leq \|x_n - x\|.$$

En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $x_n \in B(0,R)$.

(2) **Distance à l'intersection.** Soit $y \in B(0,R)$ et $u = P_{C_2}(y)$.

(a) Si $u \in C_1$, montrer que :

$$d_{C_1 \cap C_2}(y) \leq d_{C_2}(y).$$

(b) Supposons que $u \notin C_1$. Expliquer pourquoi $d_{C_1}(u) > 0$.

(c) Si $u \notin C_1$, montrer que

$$\frac{\delta}{d_{C_1}(u)}(u - P_{C_1}(u)) \in C_1.$$

En déduire que :

$$\frac{\delta}{d_{C_1}(u) + \delta}u \in C_1.$$

(d) Si $u \notin C_1$, montrer alors que :

$$d_{C_1 \cap C_2}(y) \leq \delta^{-1} d_{C_1}(u)\|u\| + d_{C_2}(y).$$

(e) Montrer que :

$$d_{C_1}(u) \leq d_{C_2}(y) + d_{C_1}(y).$$

(f) Conclure qu'il existe $\kappa > 0$, pour tout $y \in B(0,R)$, on a :

$$d_{C_1 \cap C_2}(y) \leq \kappa \max(d_{C_1}(y), d_{C_2}(y)).$$

(3) **Rapprochement de l'intersection.**

(a) Montrer que, pour tout $x \in H$,

$$d_{C_1\cap C_2}(P_{C_1}(x))^2 \leq d_{C_1}(x)^2 + d_{C_1\cap C_2}(x)^2 + 2\langle P_{C_1\cap C_2}(x) - x, x - P_{C_1}(x)\rangle.$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in H$,

$$d_{C_1\cap C_2}(P_{C_1}(x))^2 \leq -d_{C_1}(x)^2 + d_{C_1\cap C_2}(x)^2.$$

Vérifier de même que :

$$d_{C_1\cap C_2}(P_{C_2}(x))^2 \leq -d_{C_2}(x)^2 + d_{C_1\cap C_2}(x)^2.$$

(c) Pour $x \in C_2 \cap B(0, R)$, montrer que :

$$d_{C_1\cap C_2}(P_{C_1}(x))^2 \leq \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) d_{C_1\cap C_2}(x)^2$$

et pour $x \in C_1 \cap B(0, R)$, montrer que :

$$d_{C_1\cap C_2}(P_{C_2}(x))^2 \leq \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) d_{C_1\cap C_2}(x)^2.$$

(d) Montrer que la suite $(d_{C_1\cap C_2}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend géométriquement vers 0.

(4) Établir que (x_n) est une suite convergente. Quelle est sa vitesse de convergence ? À quel ensemble appartient sa limite ?

Exercice 12. Opérateur proximal : On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, minorée et qui tend vers $+\infty$ à l'infini. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:

$$g_x(y) = f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2.$$

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, g_x admet un unique minimum, noté p_x, qui est caractérisé par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(y) - f(p_x) - \langle x - p_x, y - p_x\rangle \geq 0.$$

(2) En remarquant que, pour tous x et y,

$$f(p_y) - f(p_x) - \langle x - p_x, p_y - p_x\rangle \geq 0,$$

et en examinant $\|x - p_x - (y - p_y)\|^2$ montrer que

$$\|p_x - p_y\|^2 + \|x - p_x - (y - p_y)\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

(3) Montrer que les points fixes de $x \mapsto p_x$ sont exactement les minimas de f.

(4) Si C est un convexe fermé, on définit ι_C vérifie $\iota_C(x) = 0$ pour $x \in C$ et $\iota_C(x) = +\infty$ si $x \notin C$. Montrer que ι_C est convexe. À quel problème se réduit le problème de minimisation de g_x dans le cas $f = \iota_C$? Commenter.

6. Calcul différentiel banachique

6.1. **Différentielle, propriétés de base.**

6.1.1. *Définitions.* Notons $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application, et a un point de U.

Définition 6.1. On dit que f est différentiable, ou aussi dérivable, au point a s'il existe une **application linéaire continue** $g : E \to F$ telle que

$$f(a+h) - f(a) - g(h) = o(h)$$

quand h tend vers 0 (le membre de gauche est bien défini si h est suffisamment proche de 0).

Proposition 6.2. *Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*

• *Unicité de l'≪ application linéaire tangente ≫.* Une telle application g, si elle existe, est unique. En effet, soit $\tilde{g}$ une autre application linéaire continue telle que

$$f(a+h) - f(a) - \tilde{g}(h) = o(h).$$

Alors $\tilde{g}(h) - g(h) = o(h)$ quand h tend vers 0, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout h dans E, si $\|h\| < \eta$, alors $\|\tilde{g}(h) - g(h)\| \leq \varepsilon\|h\|$. Pour tout h dans E tel que $\|h\| \leq 1$, nous avons $\|\frac{\eta}{2}h\| < \eta$, donc par homogénéité, $\|\tilde{g}(h) - g(h)\| \leq \varepsilon\|h\|$. On en tire : $\|\tilde{g} - g\| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\tilde{g} = g$. Cet élément g de l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$ sera noté

$$df_a : E \to F$$

(ou aussi $f'(a)$ ou encore $Df(a)$) et appelé la **différentielle** (ou aussi dérivée) de f en a.

Définition 6.3. On dit que f est différentiable (ou aussi dérivable) dans U si f est différentiable en tout point de U. L'application $x \mapsto df_x$ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ est alors notée

$$df : U \to \mathcal{L}(E, F)$$

(ou aussi $f' : U \to \mathcal{L}(E, F)$) et appelée la différentielle (ou aussi dérivée) de f.

On dit que f est continuement différentiable (ou aussi de classe $\mathcal{C}^1$) en a si f est diffrentiable en tout point d'un voisinage ouvert V de a dans U et si $df : V \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue en a (pour la structure usuelle d'espace vectoriel normé de $\mathcal{L}(E, F)$).

On dit que f est continuement différentiable (ou aussi de classe $\mathcal{C}^1$) dans U si f est continuement différentiable en tout point de U, ou, de manière équivalente, si f est différentiable en tout point de U et si $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

6.1.2. *Propriétés élémentaires.*

Proposition 6.4. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, V un ouvert de F, a un point de U, f, f_1, $f_2 : U \to F$ et $g : V \to G$ des applications telles que $f(U)$ soit contenu dans V.*

Alors, nous avons la liste de propriétés suivantes :

(1) *Si f est constante, alors f est différentiable en a et $df_a = 0$.*

(2) *Si $f : U \to F$ est la restriction d'une application linéaire continue de E dans F, qu'on notera encore f, alors f est continuement différentiable dans U et, pour tout $x \in U$, on a :*

$$df_x = f.$$

(3) *Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to G$ est différentiable en a, et*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

(4) *Si $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ est un produit d'espaces vectoriels normés, et $f = (f_n, ..., f_n)$, alors f est différentiable en a (resp. continuement différentiable en a, différentiable dans U, continuement différentiable dans U) si et seulement si f_i l'est pour tout $i = 1, \cdots, n$ et :*

$$df_a = (d(f_1)_a, ..., d(f_n)_a).$$

(5) *Si $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un produit d'espaces vectoriels normés, et si f est la restriction d'une application multilinéaire continue, qu'on notera encore f, alors f est continuement différentiable dans U et pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in U$:*

$df_{(x_1,\cdots,x_n)}$:
$(h_1, \cdots, h_n) \mapsto f(h_1, x_2, . \cdots, x_n) + f(x_1, h_2, x_3, \cdots, x_n) + \cdots + f(x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n).$

(6) *Si f_1 et f_2 sont différentiables en a, alors $f_1 + \lambda f_2$ est différentiable en a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et :*

$$d(f_1 + \lambda f_2)_a = d(f_1)_a + \lambda d(f_2)_a.$$

(7) *Si $F = \mathbb{R}$ (auquel cas E est suppos réel) ou $F = \mathbb{C}$, si f_1 et f_2 sont différentiables en a, alors l'application produit $f_1 f_2$ (définie par $x \mapsto f_1(x)f_2(x)$) est différentiable en a et :*

$$d(f_1 f_2)_a = f_2(a)d(f_1)_a + f_1(a)d(f_2)_a.$$

(8) *Si E et F sont des espaces de Banach, si $f(U)$ est un ouvert de F et si $f : U \to f(U)$ est un homomorphisme, différentiable en a, tel que df_a soit une bijection de E sur F, alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et :*

$$d(f^{-1})_b = (df_{f^{-1}(b)})^{-1}.$$

(9) *Si E et F sont des espaces de Banach, alors l'application $\varphi : \mathcal{GL}(E, F) \to \mathcal{GL}(F, E)$ définie par $u \mapsto u^{-1}$ est continuement différentiable sur $\mathcal{GL}(E, F)$ et sa différentielle en $u \in \mathcal{GL}(E, F)$ est l'application $d\varphi_u : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F, E)$ définie par :*

$$d\varphi_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

(10) *Si f est différentiable en a, alors f est différentiable au sens de Gâteaux en a et $df_a(h) = \partial_h f(a)$ pour tout h dans E.*

Démonstration. (1) est trivial. (2) vient du fait que :

$$f(a + h) - f(a) = f(h).$$

Montrons maintenant la formule de composition de (3). Il suffit d'écrire, pour $h \in E$ assez petit :

$$g \circ f(a + h) = g(f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)),$$

où $\varepsilon_1(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. La formule de composition à bien un sens puisque $f(a) \in V$ implique, pour h assez petit $f(a+h) \in V$. On utilise ensuite la différentiabilité de g en $b = f(a)$:

$$g(f(a+h)) = g(b) + dg_b(df_a(h) + h\varepsilon_1(h)) + \|h\|\varepsilon_2(df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)).$$

On en tire :

$$g(f(a+h)) = g(b) + dg_b(df_a(h)) + dg_b(h\varepsilon_1(h)) + \|h\|\tilde{\varepsilon}_2(h),$$

avec $\varepsilon_2(h)$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0 (on utilise la continuité de df_a) La continuité de dg_b fournit alors :

$$\|dg_b(\|h\|\varepsilon_2(h))\| \leq \|h\|\|dg_b\|\|\varepsilon_2(h)\|.$$

On s'intéresse maintenant à (4). Supposons que $f = (f_1, \cdots, f_n)$ est différentiable en a. On peut écrire que, pour h assez petit :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

On note p_i la projection canonique sur la i-ème composante de l'espace produit. p_i est une application linéaire continue. On en déduit :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + p_i \circ df_a(h) + \|h\|p_i(\varepsilon(h)).$$

Inversement, supposons que les f_i soient différentiables en a ; on peut écrire que :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + p_i \circ df_a(h) + \|h\|\varepsilon_i(h).$$

On en tire :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

avec $\varepsilon(h) = (\varepsilon_1(h), \cdots, \varepsilon_n(h))$.

On s'occupe maintenant de (5). Soit f une telle application multilinéaire. On sait qu'elle vérifie :

$$\|f(y_1, \cdots, y_n)\| \leq C\|y_1\| \cdots \|y_n\|.$$

On examine alors :

$$f(x+h) - f(x) - (f(h_1, x_2, . \cdots, x_n) + f(x_1, h_2, x_3, \cdots, x_n) + \cdots + f(x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n)\,.$$

Il s'agit d'une somme de termes de la forme $f(y_1, \cdots, y_n)$ avec au moins deux y_i distincts égaux à h_i. Ainsi, on peut écrire :

$$\|f(y_1, \cdots, y_n)\| \leq C\|x\|^{n-\alpha}\|h\|^{\alpha},$$

où α est un entier au moins égal à 2.

L'assertion (6) résulte de (2), (3) et (4) via la composition par l'application linéaire continue : $(x, y) \mapsto x + \lambda y$. □

L'assertion (7) est de même une conséquence de (3), (4) et (5) via la composition par l'application bilinéaire continue $(x, y) \mapsto xy$.

Montrons (8). Par le théorème des isomorphismes de Banach df_a est d'inverse continu : $c = \|df_a^{-1}\|$ est donc bien défini. On pose $y = f(x)$ et $b = f(a)$.

On observe que :

$$y - b - df_a(x-a) = \|x-a\|\varepsilon(x-a).$$

On obtient facilement que :

$$(df_a)^{-1}(y-b) - (x-a) = \|x-a\|df_a^{-1}(\varepsilon(x-a)).$$

On commence par en tirer que :

$$\|x-a\| \leq c(\|y-b\| + \|x-a\|\|\varepsilon(x-a)\|.$$

Pour y suffisamment proche de b, on a (continuité de f^{-1}) x proche de a de sorte qu'on ait : $\|\varepsilon(x-a)\| \leq (2c)^{-1}$ d'où l'on tire :

$$\|x-a\| \leq 2c\|y-b\|.$$

On en déduit que :

$$\|f^{-1}(y) - b - (df_a)^{-1}(y-b)\| \leq \|y-b\|\|\tilde{\varepsilon}(y-b)\|.$$

On traite le point (9). On rappelle que $\mathcal{GL}(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$. En effet, soit $u_0 \in \mathcal{GL}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\|v\| < \|u_0^{-1}\|^{-1}$; on a :

$$u_0 + v = u_0(\mathsf{Id} + u_0^{-1}v)$$

et $\|u_0^{-1}v\| \leq \|u_0^{-1}\|\|v\| < 1$ de sorte que $\mathsf{Id} + u_0^{-1}v$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(u_0^{-1}v)^k$. En particulier, on obtient :

$$(u_0+v)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(u_0^{-1}v)^k u_0^{-1}.$$

Cela implique notamment que :

$$(u_0+v)^{-1} - u_0^{-1} = -u_0^{-1}vu_0^{-1} + \sum_{k\geq 2}^{+\infty}(-1)^k(u_0^{-1}v)^k u_0^{-1}.$$

On a le contrôle :

$$\left\|\sum_{k\geq 2}^{+\infty}(-1)^k(u_0^{-1}v)^k u_0^{-1}\right\| \leq \|u_0^{-1}\|\sum_{k=2}^{+\infty}\|u_0^{-1}v\|^k = \|u_0^{-1}\|\|u_0^{-1}v\|^2(1-\|u_0^{-1}v\|)^{-1}.$$

Le conclusion est alors évidente. Pour la continuité de la différentielle, il suffit de voir que l'application $(v,w) \mapsto -v \circ \cdot \circ w$ de $\mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(E,F)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F),\mathcal{L}(F,E))$ est bilinéaire et continue.

Concernant le point (10), on rappelle que la Gâteaux-différentiabilité de f en a suivant $h \in E$ signifie que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \frac{f(a+\varepsilon h) - f(a)}{\varepsilon}$$

existe dans F (et est notée $\partial_h f(a)$). Il suffit alors d'écrire que, si f est désférentiable en a, on a, pour tout $h \in E$ et pour $t > 0$ assez petit :

$$f(a+th) - f(a) - df_a(th) = \|th\|\varepsilon(th).$$

Il suffit alors de diviser par t et de passer à la limite.

Remarque 6.5. Une fonction peut avoir des dérivées directionnelles dans toutes les directions en un point sans y être différentiable :

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2$, admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$, mais n'y est pas différentiable.

6.2. **Accroissements finis.**

6.2.1. *Théorème des accroissements finis.*

Théorème 6.6. *Soient $I = [\alpha, \beta]$, F un evn et $\Phi : I \to F$, $\phi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que ϕ et Φ sont dérivables sur I et qu'on a :*

$$\|\Phi'(x)\| \leq \phi'(x), \quad \forall x \in I.$$

Alors :

$$\|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\beta) - \phi(\alpha).$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Considérons l'ensemble A défini par :

$$A = \{\gamma \in I : \forall t \in [\alpha, \gamma], \quad \|\Phi(t) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(t) - \phi(\alpha) + \varepsilon(t - \alpha)\}.$$

On a : $\alpha \in A$, donc A est non vide, A est majoré par β. A admet donc une borne supérieure notée $\theta \in [\alpha, \beta]$. Il est aisé de constater que A est fermé dans $[\alpha, \beta]$ puisque ϕ et Φ sont continues sur I. La borne supérieure de A est donc atteinte et par conséquent on a :

$$A = [\alpha, \theta].$$

Il s'agit de montrer que $\theta = \beta$. On suppose que $\theta < \beta$.

On a :

$$\|\Phi(\theta) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta) - \phi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha).$$

ϕ et Φ sont dérivables en θ, il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour $t \in [0, \delta]$:

$$\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta) - t\Phi'(\theta)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}t$$

et

$$\|\phi(\theta + t) - \phi(\theta) - t\phi'(\theta)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}t.$$

Examinons alors :

$$\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\alpha)\| \leq \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta)\| + \|\Phi(\theta) - \Phi(\alpha)\|.$$

Il s'ensuit que :

$$\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta) - \phi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha) + \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta)\|.$$

On en tire :

$$\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta) - \phi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}t + t\|\Phi'(\theta)\|$$

et

$$\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta) - \phi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}t + t\|\phi'(\theta)\|$$

d'où :

$$\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\theta + t) - \phi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha) + \varepsilon t.$$

Ainsi, on a : $\theta + \delta \in A$ et c'est contradictoire. On en déduit $\theta = \beta$ et donc :

$$\|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\| \leq \phi(\beta) - \phi(\alpha) + \varepsilon(\beta - \alpha)$$

et ce pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

6.2.2. *Applications.* Soient E, F des evn, U un ouvert de E, $H : U \to F$ une application $\mathcal{C}^1$. Soient aussi a_0 et a_1 deux points de U tels que le segment les joignant soit encore dans U. Pour $t \in [0,1]$, on pose : $a_t = (1-t)a_0 + ta_1$. On introduit :

$$\Phi(t) = H(a_t)$$

et on a :

$$\Phi'(t) = D_{a_t}H(a_1 - a_0).$$

Proposition 6.7. *S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]n$, on a :*

$$\|D_{a_t}H(a_1 - a_0)\| \leq M,$$

alors :

$$\|H(a_1) - H(a_0)\| \leq M.$$

Proposition 6.8. *S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]n$, on a :*

$$\|D_{a_t}H\| \leq M,$$

alors :

$$\|H(a_1) - H(a_0)\| \leq M\|a_1 - a_0\|.$$

Proposition 6.9. *Si U est connexe et que la différentielle de H est nulle sur U, alors H est constante sur U.*

Proposition 6.10. *Supposons que U est convexe et qu'il existe $M \geq 0$ tel qu'on ait l'inégalité $\|D_xH\| \leq M$ pour tout $x \in U$, alors H est M-lipschitzienne.*

6.3. **Différentielles partielles et d'ordre supérieur.**

6.3.1. *Différentielles partielles, dérivées partielles.* Soient $E_1, \cdots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, E l'espace vectoriel normé produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ (muni de la norme $\|(x_1, \cdots, x_n)\| = \max(\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|)$), U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application et $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Définition 6.11. Pour tout $a = (a_1, \cdots, a_n)$ dans U, on dit que f est différentiable (ou dérivable) par rapport la i-ème variable en a si l'application (parfois appelée la i-ème application partielle) $x \mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$ est différentiable en a_i.

La différentielle en a_i de cette application, qui est un élément de $\mathcal{L}(E_i, F)$, est notée

$$\partial_i f_a \text{ ou } D_i f(a) \text{ ou } \partial_{x_i} f(a) \text{ ou } f'_{x_i}(a) \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

et appelée la i-ème différentielle partielle (ou i-ème dérivée partielle) de f en a.

Proposition 6.12. *Si f est différentiable en un point a de U, alors f est différentiable par rapport à chaque variable en a et :*

$$df_a : (h_1, \cdots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_a(h_i).$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$. Soit $x \in E_i$. On pose $\tilde{x}_i = q_i(x) := (0, \cdots, 0, \underbrace{x}_{i}, 0, \cdots, 0)$.

La différentiablilité de f en a permet d'écrire :

$$f(a + \tilde{x}_i) - f(a) - df_a(\tilde{x}_i) = \|\tilde{x}_i\|\varepsilon(\tilde{x}_i) = \|x\|\varepsilon \circ q_i(x).$$

$\tilde{x}_i \mapsto f(a + \tilde{x}_i)$ est donc différentiable en 0 et dérivée $df_a \circ q_i =: \partial_i f_a \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Pour $h \in E$, on écrit :

$$h = \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i$$

et il vient par linéarité :

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} df_a(\tilde{h}_i).$$

□

La réciproque est fausse en général. Considérer l'exemple :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0.$$

Proposition 6.13. *L'application f est $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si f est différentiable par rapport à chaque variable en tout point de U et si pour tout $i = 1, \cdots, n$, l'application $\partial_i f : x \mapsto \partial_i f_x$ de U dans $\mathcal{L}(E_i, F)$ est continue sur U.*

Démonstration. Supposons d'abord que f est $\mathcal{C}^1$ sur U. Alors, f est différentiable par rapport à chaque variable (proposition précédente) et on a, sur E_i :

$$df_a \circ q_i = \partial_i f_a,$$

où $q_i : h_i \mapsto (0, \cdots, 0, \underbrace{h_i}_{i}, 0, \cdots, 0)$ est une application de $\mathcal{L}(E_i, E)$. La continuité par rapport à a en découle par composition.

Réciproquement, supposons que f est différentiable par rapport à chaque variable et de différentielles partielles continues sur U.

Soit $a \in U$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h = (h_1, \cdots, h_n)$ tel que : $\|h\| < \delta$, on a :

$$(a + h) \in U \quad \text{et} \quad \|\partial_i f_{a+h} - \partial_i f_a\| \leq \varepsilon.$$

On pose $h(0) = (0, \cdots, 0)$ et

$$h(k) = (h_1, h_2, \cdots, h_k, 0, \cdots, 0).$$

On a $h(n) = h$. On peut écrire la somme télescopique :

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \Big(f(a + h(k-1) + \tilde{h}_k) - f(a + h(k-1)) \Big),$$

où $\tilde{h}_k = (0, \cdots, 0, \underbrace{h_k}_{k}, 0, \cdots, 0)$.

On écrit alors :

$$f(a+h)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\partial_k f_a(h_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(f(a+h(k-1)+\tilde{h}_k)-f(a+h(k-1))-\partial_k f_a(h_k)\right).$$

On considère :

$$t\mapsto f(a+h(k-1)+t\tilde{h}_k)-t\partial_k f_a(h_k).$$

Sa dérivée vaut :

$$df_{a+h(k-1)+t\tilde{h}_k}(\tilde{h}_k)-\partial_k f_a(h_k)=\partial_k f_{a+h(k-1)+t\tilde{h}_k}(h_k)-\partial_k f_a(h_k).$$

On a :

$$\|df_{a+h(k-1)+t\tilde{h}_k}(\tilde{h}_k)-\partial_k f_a(h_k)\|\leq \varepsilon\|h_k\|.$$

Il s'ensuit que :

$$\left\|f(a+h)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\partial_k f_a(h_k)\right\|\leq n\varepsilon\|h\|.$$

f est donc différentiable en a et de dérivée :

$$df_a(h)=\sum_{k=1}^{n}\partial_i f_a(h_i).$$

Les $\partial_i f_a\circ p_i\in\mathcal{L}(E,F)$ sont des fonctions continues de a comme composées de fonctions continues.

□

Corollaire 6.14. *Supposons que $E=\mathbb{K}^n$. Si f est différentiable en $a=(a_1,\cdots,a_n)\in U$, alors f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{x\to a_i, x\neq a_i}\frac{f(a_1,\cdots,a_{i-1},x,a_{i+1},\cdots,a_n)-f(a)}{x-a_i}.$$

La différentielle en a est donnée par :

$$df_a(h)=\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}f(a)h_i.$$

f est $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si ses dérivées partielles existent sur U et si les applications $a\mapsto\partial_{x_i}f(a)$ sont continues de U dans F.

6.3.2. *Différentielles d'ordre* 2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, U un ouvert de E, $a\in U$ et $f:U\to F$ une application. Rappelons que $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ (pour la norme d'opérateur), qui est un espace de Banach si F l'est.

Définition 6.15. On dit que f est deux fois différentiable (ou deux fois dérivable) en a si f est différentiable sur un voisinage ouvert V de a contenu dans U, et si $df:V\to\mathcal{L}(E,F)$ est différentiable en a et nous notons :

$$d^2f_a=d(df)_a.$$

Remarque 6.16. Rappelons que l'application de $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ dans $\mathcal{L}(E\times E,F)$ qui à u associe l'application bilinéaire continue $(x,y)\mapsto u(x)(y)$ est une application linéaire isométrique. Si f est deux fois différentiable en a, nous noterons d^2f_a l'application bilinéaire associée.

Remarque 6.17. Supposons que f soit deux fois différentiable en a. Soit $h' \in E$. Alors l'application $x \mapsto df_x(h')$ est différentiable en a de différentielle $h \mapsto d^2 f_a(h, h')$. Il suffit de voir que $df_x(h') = ev_{h'} \circ df_x$. Cela s'écrit encore $d^2 f_a(h, h') = d(df(h'))_a(h)$.

Remarque 6.18. Si $E = \mathbb{K}^r$ et si f est deux fois différentiable en a, on a :

$$d^2 f_a(h, h') = \sum_{1 \leq i,j \leq r} h_i h'_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Proposition 6.19. *Si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors $d^2 f_a$ est une application bilinéaire continue symétrique.*

Démonstration. Fixons $h, h' \in E$. On considère l'application de $[0, 1] \to F$ définie par :

$$g(t) = f(a + th' + h) - f(a + th).$$

On a par dérivation des fonctions composées :

$$g'(t) = df_{a+th+h'}(h) - df_{a+th}(h) = df_{a+th+h'}(h) - df_a(h) - (df_{a+th} - df_a)(h).$$

On remarque que :

$$g'(t) - d^2 f_a(h', h) = (df_{a+th+h'} - df_a - d^2 f_a(th + h'))(h) - (df_{a+th} - df_a - d^2 f_a(th))(h)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que si $\|h\| < r/2$ et $\|h'\| < r/2$ on a :

$$\|df_{a+th+h'} - df_a - d^2 f_a(th + h')\| \leq \varepsilon \|th + h'\|, \quad \|df_{a+th} - df_a - d^2 f_a(th)\| \leq \varepsilon \|th\|.$$

Il vient alors :

$$\|g'(t) - d^2 f_a(h', h)\| \leq 2\varepsilon \|h\|(\|h\| + \|h'\|) \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|h'\|)^2.$$

L'inégalité des accroissements finis implique que :

$$\|g(1) - g(0) - d^2 f_a(h', h)\| \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|h'\|)^2.$$

Comme $g(1) - g(0)$ est symétrique par rapport à h et h', on en déduit que :

$$\|g(1) - g(0) - d^2 f_a(h, h')\| \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|h'\|)^2.$$

Ainsi, on a :

$$\|d^2 f_a(h, h') - d^2 f_a(h', h)\| \leq 2\varepsilon(\|h\| + \|h'\|)^2.$$

Par homogénéité, cela est valable pour tous h et $h' \in E$ et la conclusion s'ensuit.

□

6.3.3. *Différentielles d'ordre supérieur.*

Définition 6.20. On dit que $f : U \to F$ est k fois différentiable en a si df est $k - 1$ fois différentiable en tout point x d'un voisinage de a et que $x \mapsto d^{k-1} f_x$ est différentiable en a.

Proposition 6.21. *Si f est k fois différentiable en a, alors on a :*

$$d^k f_a(h_1, \cdots, h_k) = d(d^{k-1} f)_a(h_2, \cdots, h_k)(h_1) = d^2(d^{k-2} f)_a(h_3, \cdots, h_k)(h_2, h_1) = \cdots.$$

On définit les applications de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geq 2$.

Définition 6.22. Soient E, F des evn et U un ouvert de E. Soit f une application de U dans F. Soit $k \geq 2$. On dit que f est $\mathcal{C}^k$ sur U si f est $\mathcal{C}^1$ sur U et si $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

Définition 6.23. On dit que $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U pour tout $k \geq 1$.

Remarque 6.24. On rappelle que $\mathcal{L}^k(E, F)$ désigne l'espace vectoriel des applications k-linéaires continues de E^k dans F. On a une identification canonique entre $\mathcal{L}^k(E, F)$ avec $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E, F))$.

Pour une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, on peut donc considérer $D^k_a f$ comme un élément de $\mathcal{L}^k(E, F)$.

Proposition 6.25. *Si f est k fois différentiable en a, alors $d^k f_a$ est une application k-linéaire symétrique.*

Démonstration. Pour $k = 2$, le résultat est déjà prouvé. On raisonne par récurrence. Soit $k \geq 2$. Pour $(h_1, \cdots, h_{k+1})$, on a :

$$d^{k+1} f_a(h_1, \cdots, h_{k+1}) = d\left(d^k f(h_2, \cdots, h_{k+1})\right)_a (h_1) = d^2\left(d^{k-1} f(h_3, \cdots, h_{k+1})\right)_a (h_2, h_1).$$

Par récurrence, on en déduit la symétrie par rapport à $(h_2, \cdots, h_{k+1})$ et par rapport à (h_2, h_1). On en conclut la symétrie par rapport à toutes les transpositions et le résultat en découle. $\square$

Proposition 6.26. *On a :*

(1) *L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
(2) *Les applications affines continues sont $\mathcal{C}^\infty$.*
(3) *Les applications bilinéaires continues sont $\mathcal{C}^\infty$. Les applications multilinéaires continues sont aussi $\mathcal{C}^\infty$.*
(4) *La composée (bien définie) d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est encore de classe $\mathcal{C}^k$.*
(5) *Le produit d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est encore $\mathcal{C}^k$ sur U.*
(6) *L'application $\mathcal{GL}(E, F) \to \mathcal{GL}(F, E) : u \mapsto u^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$.*
(7) *Si $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et que $f \in \mathcal{C}^k(U)$, alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(V)$.*

Démonstration. Le point (1) est trivial. Pour le point (2), on écrit :

$$f(x) = b + u(x), \text{ avec } u \in \mathcal{L}(E, F), b \in F.$$

Un calcul élémentaire fournit : $df_x = u$ et ainsi $d^2 f = 0$.

Passons au point (4). Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. On a vu que :

$$dB_{(x_1,x_2)}(h_1, h_2) = B(x_1, h_2) + B(h_1, x_2).$$

On remarque que $(x_1, x_2) \mapsto dB_{(x_1,x_2)} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire. Il s'agit de montrer sa continuité. Par exemple, montrons que :

$$(x_1 \mapsto B(x_1, p_2(\cdot))) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, \mathcal{L}(E_2, F)).$$

On constate que, par définition :

$$\sup_{\|x_1\| \leq 1} \|B(x_1, p_2(\cdot))\|_{\mathcal{L}(E_2,F)} \leq \|B\| < +\infty.$$

On en déduit que :

$$d(dB)_{(x_1,x_2)}(k_1, k_2) = B(k_1, \cdot) + B(\cdot, k_2).$$

et alors : $d^3 B = 0$.

On traite le point (4). Soit G un evn. Soit $f : U \to V$ et $g : V \to G$ deux applications $\mathcal{C}^k$. $g \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Par hypothèse de récurrence $x \mapsto dg_{f(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, de plus df est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Le résultat en découle par récurrence.

Concernant le point (5), il suffit de considérer l'application bilinéaire produit et la formule de composition.

Intéressons nous au point (6). On a déjà vu que cette application est $\mathcal{C}^1$. Par composition d'une application bilinéaire continue (donc $\mathcal{C}^\infty$) et d'applications $\mathcal{C}^1$, on en conclut que $u \mapsto d\varphi_u$ est $\mathcal{C}^2$ et le résultat s'ensuit par récurrence.

Pour le point (7), on rappelle que :

$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}.$$

Une simple combinaison du théorème de composition et du point (6) donne le résultat. □

Proposition 6.27. *$f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est $\mathcal{C}^k$ si et seulement si les différentielles partielles de f existent jusqu'à l'ordre k et sont continues.*

6.3.4. *Formule de Taylor.* Dans cette sous-section, E et F seront de dimension finie. Soit U un ouvert non vide de E et a_0, a_1 deux points de U tels que $a_t = (1-t)a_0 + ta_1 \in U$ pour $t \in [0,1]$. On pose $v = a_1 - a_0$.

Théorème 6.28. *Si $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, alors on a :*

$$\begin{aligned} f(a_1) =& f(a_0) + df_{a_0}(v) + \frac{1}{2!}d^2 f_{a_0}(v,v) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1}f_{a_0}(v,\cdots,v) \\ &+ \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1} d^k f_{a_t}(v,\cdots,v)\,dt. \end{aligned}$$

Démonstration. En raisonnant composante par composante, on peut supposer que $F = \mathbb{C}$. Pour $t \in [0,1]$, on pose $h(t) = f(a_0 + tv)$. h est $\mathcal{C}^k$ par composition et :

$$h^{(l)}(t) = d^l f_{a_t}(v,\cdots,v), \quad \forall l \in \{1,\cdots,k\}.$$

La formule de Taylor usuelle donne la conclusion. □

6.4. **En dimension finie.** Examinons de plus près le cas de la dimension finie. On pose $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^q$ et on considère $f : U \to F$. On note $f = (f_1, \cdots, f_q)$. f est différentiable en a si et seulement si les f_i le sont et dans ce cas :

$$df_a = ((df_1)_a, \cdots, (df_q)_a).$$

Dans les bases canoniques de E et F, on peut écrire la matrice de df_a, appelée matrice jacobienne et notée $J_a(f)$. On a :

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \le j \le p\ ,\ 1 \le i \le q}.$$

Le coefficient de i-ème ligne et de la j-ème colonne est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

$J_a(f)H$ est le vecteur colonne des coordonnées de $df_a(h)$ dès que H désigne le vecteur colonne des coordonnées de h ; c'est aussi la dérivée de f au point a dans la direction h.

La formule de composition fournit :

$$J_x(g \circ f) = J_{f(x)}(g)\, J_x(f),$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x).$$

Quand f est deux fois différentiable en a, on a la formule :

$$df_a(h,k) = \sum_{i,j} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

et :

$$df_a(h,h) = \sum_{i=1}^{p} h_i^2 \partial_{x_i}^2 f(a) + 2 \sum_{i<j} h_i h_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(a).$$

Supposons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle matrice hessienne de f en a la matrice symétrique définie par :

$$\mathsf{Hess}_a(f) = \big(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(a)\big)_{1 \leq j \leq p\ ,\ 1 \leq i \leq p}\,.$$

On a dans ce cas :

$$df_a(h,h) = {}^t H \mathsf{Hess}_a(f) H.$$

6.5. **Problèmes d'extrema.**

6.5.1. *Rappels sur les formes quadratiques.* Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit Q une forme quadratique sur E et B la forme bilinéaire associée. On a :

$$Q(x) = B(x,x), \quad B(x,y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}.$$

On rappelle que le noyau de B est définie par

$$E^\perp = \{x \in E : \forall y \in E, B(x,y) = 0\}.$$

On dit que Q ou B est non dégénérée si $E^\perp = \{0\}$.

On dit qu'une forme Q non dégénérée est définie positive si $Q(x) > 0$ pour $x \neq 0$. On définit de même la notion de définie négative.

Si $(e_1, \cdots, e_m)$ est une base de E. La matrice associée à B est la matrice symétrique :

$$M = (B(e_i, e_j)).$$

On a : $B(x,y) = {}^t Y M X$. Les valeurs propres de M sont réelles.

On rappelle qu'il existe une base orthonormée pour le produit scalaire canonique dans laquelle M est diagonalisée :

$$P^{-1} M P = D, \quad P^{-1} = {}^t P.$$

Théorème 6.29. *Soit Q une forme quadratique sur E (de dimension m). Soit $p \in \mathbb{N}$ la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels Q est définie positive. Soit q la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels Q est définie négative. Soit r la dimension du noyau de Q. Alors, on a : $p + q + r = m$ et il existe une base de E dans laquelle la forme quadratique prend la forme :*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2.$$

Le triplet (p, q, r) s'appelle la signature de Q. p correspond au nombre de valeurs propres positives d'une matrice de Q dans n'importe quelle base, q au nombre de valeurs propres négatives.

Démonstration. (ébauche) Soit H le noyau de Q, engendré par $e_1, \cdots, e_r$. Soit S un sous-espace supplémentaire de H. La restriction de Q à S est non dégénérée. On peut supposer que Q est non dégénérée (en la restreignant à S). On considère alors F un sous-espace de dimension maximale p sur lequel Q soit définie positive. On a : $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. On a pour $x \in F^\perp$, on a $Q(x) \leq 0$. L'écriture normalisée de Q dans une base adéquate s'ensuit facilement. La caractérisation par les nombres de valeurs propres positives et négatives s'obtient en considérant une base où Q est diagonale et en cherchant la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel Q soit définie positive. □

6.5.2. *Extrema locaux.* Soit $U \subset E$ un ouvert de E (de dimension finie).

Soit $H : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

Définition 6.30. Un point $a \in U$ est un maximum (resp. minimum) local de H s'il existe un voisinage V de a sur lequel on a :

$$H(x) \leq H(a) \text{ resp. } H(x) \geq H(a).$$

On définit de même la notion de maximum et de minimum local strict (avec des inégalités strictes pour $x \neq a$).

Définition 6.31. Quand H est différentiable en a, on dit que a est un point critique si et seulement si $dH_a = 0$.

Voici une condition nécessaire pour avoir des extrema locaux.

Proposition 6.32. *Supposons que H est $\mathcal{C}^2$ sur U et que a est un extremum local de H. Alors a est un point critique de H et si a est un minimum local (resp. maximum local), on a $d^2H_a \geq 0$ (resp. $d^2H_a \leq 0$).*

Voici des conditions suffisantes pour avoir des extrema locaux.

Proposition 6.33. *Supposons que H est $\mathcal{C}^2$ sur U et que $dH_a = 0$. Si $d^2H_a > 0$ (resp. $d^2H_a < 0$), alors a est un minimum local strict (resp. maximum local strict).*

6.5.3. *Extrema liés.* Énonçons d'ores et déjà le théorème des extrema liés dont la preuve utilise le théorème d'inversion locale de la prochaine section. On pourra donc passer la preuve dans une première lecture.

Théorème 6.34. *Soient $H, f_1, \cdots, f_p$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $a \in U$. Considérons :*

$$X = \{x \in U : f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_p(x) = 0\}.$$

Supposons que les formes $(df_j)_a$ *sont indépendantes. Alors, les formes* $dH_a, (df_1)_a, \cdots, (df_p)_a$ *sont liées.*

6.6. **Exercices.**

Exercice 1. Soient a et b des réels. Étudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes :

$$f_a(x) = \begin{cases} xe^{-a/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

et

$$g_b(x) = \begin{cases} |x|\cos(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2. Étudier la continuité, l'existence des dérivées directionnelles et la différentiabilité des fonctions suivantes en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}\,\sin\sqrt{x^2+y^2},$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$h_{a,b}(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^a|y|^b}{x^2+y^2} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases},$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & x \neq y, \\ f'(x) & x = y \end{cases}.$$

Montrer que g est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 4. Soit $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 1\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle. Conclure.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3x^2y + e^{xz^2} + 4z^3$. Donner la matrice jacobienne de f en $(0,-1,1)$.

Exercice 6. Soient E et F des evn. Soit $f \in \mathcal{C}^1(E,F)$. Montrer que f est k-lipschitzienne si et seulement si pour tout $a \in A$, on a : $\|df_a\| \leq k$.

Exercice 7. On définit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la fonction f par :

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable. Montrer que, pour tous x et y,

$$f(y) - f(x) - df_x(y-x) \geq 0.$$

Exercice 9. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients réels. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Soit $q \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_q[X]$ et $F = \mathbb{R}_{3q}[X]$. On considère l'application $\phi : E \to F$: $\phi(P) = P^3$.

(1) Montrer que N est une norme et qu'elle vérifie :

$$N(PQ) \leq N(P)N(Q), \quad P, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

(2) Montrer que N est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point $P \in E$. Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^1$.

(3) Quand $q = 1$ donner la matrice jacobienne de ϕ dans les bases canoniques.

Exercice 10. Soit E l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$ muni d'une norme telle que $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$. Soit $A \in E$ inversible. Pour $X \in E$, on pose :

$$F(X) = 2X - XAX.$$

(1) Montrer que $F : E \to E$ est $\mathcal{C}^1$. Calculer $F(A^{-1})$ et $dF_{A^{-1}}$.

(2) On pose $X_{p+1} = F(X_p)$, $p \geq 0$. Montrer que X_p converge vers A^{-1} dès que X_0 est dans une boule convenable.

(3) Résoudre la relation de récurrence en posant $Y_p = \mathsf{Id} - AX_p$. Que dire de la convergence de X_p ?

Exercice 11. Soit E l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$.

(1) Montrer que $\det : E \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et que $d\det_{\mathsf{Id}} = \mathsf{Tr}$.

(2) Montrer que pour tout $X, H \in E$, on a :

$$d(\det)_X(H) = \mathsf{Tr}({}^t\overline{X}H),$$

où $\overline{X}$ est la comatrice de X.

(3) Soient $y_1, \cdots, y_p$ des solutions (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) su système différentiel linéaire :

$$y'(t) = A(t)y(t),$$

où A est continue sur I à valeurs dans E. Déterminer une équation différentielle satisfaite par $w(t) = \det(y_1(t), \cdots, y_n(t))$.

Exercice 12. Soient $I = [0, 1]$, $F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $E \subset F$ le sous-espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ nulles en 0. On munit F de la norme $\| \cdot \|_\infty$ et E de la norme $\|x\|_1 = \|x'\|_\infty$. Montrer que $f : E \to F$ définie par $f(x) = x' + x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E. Calculer sa différentielle.

Exercice 13. Soient E et F des evn. Soit U un ouvert de E et une suite d'applications $f_k : U \to F$ différentiables.

On suppose que les f_k convergent simplement vers f sur U et que les Df_k convergent uniformément sur U.

Montrer que f est différentiable sur U et donner sa différentielle. Si de plus les f_k sont $\mathcal{C}^1$, montrer que leur limite l'est aussi.

Généralisation ?

Exercice 14. Soit E l'espace des matrices carrées de taille n. Quelle est la régularité de $X \mapsto X^p$ pour $p \geq 1$?

Calculer sa diffférentielle. Calculer sa différentielle seconde.

Exercice 15. Soit E l'espace des matrices carrées de taille n. On pose, pour $k \geq 0$ et $X \in E$:

$$f_k(X) = \sum_{p=0}^{k} \frac{X^p}{p!}.$$

En utilisant la suite f_k, montrer que $\exp$ est $\mathcal{C}^1$.

Si ça vous amuse, montrer qu'elle est $\mathcal{C}^2$!

Exercice 16. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, on pose :

$$\Delta f = \partial^2_{x_1} f + \cdots + \partial^2_{x_n} f.$$

(1) Donner une expression pour $\Delta(fg)$.

(2) Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $A \in O(n)$, montrer que $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$.

(3) Calculer Δf pour $f(x, y) = (\cos x - \sin x)e^y$.

(4) On pose $g_n(x) = \ln \|x\|_2$ pour $n = 2$ et $g_n(x) = \|x\|_2^{2-n}$ pour $n \geq 3$; calculer Δg_n.

Exercice 17. Trouver les applications $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 18. Étudier la nature des points critiques des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

(1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 e^x$,

(2) $g(x, y, z) = xy + xz + yz$,

(3) $h(x, y, z) = (x + y)^2 + \sin(xz) + \frac{z^2}{2}$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(u) = (u-1)^2(u+1), \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz.$$

On pose $F = f \circ \phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(1) Montrer que ϕ est une forme quadratique définie positive.

(2) Montrer que a est un point critique de F si et seulement si $a = (0,0,0)$ ou $\phi(a) = 1$.

(3) Calculer la hessienne de F en $(0,0,0)$. Quelle est la nature de ce point critique ?

(4) Montrer que F est positive. Que dire des points critiques différents de $(0,0,0)$?

Exercice 20. Soit $g(x,y,z) = xyz - 32$, $S = \{g = 0\}$ et $f(x,y,z) = xy + 2yz + 3xz$. Déterminer le minimum de f sur S.

Exercice 21. Trouver les extrema de $f(x,y,z) = 2x + 3y + 2z$ sur l'intersection du plan $x + z = 1$ et de $C = \{x^2 + y^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 22. Trouver les extrema de $f(x,y) = xy$ sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

7. INVERSION LOCALE ET FONCTIONS IMPLICITES

7.1. **Théorème d'inversion locale.**

Théorème 7.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit U un ouvert non vide de E et H : $U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$. On suppose que $dH_a \in \mathcal{GL}(E, F)$.*

Alors, il existe un ouvert U_1 de U contenant a et un ouvert V_1 de F contenant $H(a)$ tels que $H : U_1 \to V_1$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Démonstration.
Réduction. Commençons par nous ramener à un cas plus simple. Introduisons l'application affine inversible et de classe $\mathcal{C}^1$ notée A définie par :

$$A(x) = H(a) + dH_a(x - a).$$

Notons que :

$$A^{-1}(y) = a + (dH_a)^{-1}(y - H(a))$$

et que A^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Considérons l'application définie par :

$$\tilde{H}(x) = A^{-1} \circ H(x), \quad x \in U.$$

$\tilde{H}$ est encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et des calculs élémentaires fournissent :

$$\tilde{H}(a) = a, \quad d\tilde{H}_a = \mathsf{Id}.$$

Nous allons montrer le théorème pour $\tilde{H}$. Pour cela, introduisons φ l'application définie sur U par :

$$\varphi(x) = \tilde{H}(x) - x,$$

de sorte que $\varphi(a) = 0$ et $d\varphi_a = 0$.

Accroissements finis. Par continuité de la différentielle de φ au voisinage de a, il existe $\delta > 0$ tel que $B_f(a, \delta) \subset U$ et :

$$\forall x \in B_f(a, \delta), \quad \|d\phi_x\| \leq \frac{1}{2}.$$

L'inégalité de la moyenne implique donc que, pour $x, x' \in B_f(a, \delta)$:

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|.$$

En particulier, on a :

$$\|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x - a\|.$$

Notons qu'on peut aussi choisir $\delta > 0$ de sorte que $d\tilde{H}_x$ soit inversible pour $x \in B(a, \delta)$.

Point fixe. On pose $\tilde{V}_1 = B\left(a, \frac{\delta}{2}\right)$. Introduisons l'espace :

$$X = \{K \in \mathcal{C}^0\left(\tilde{V}_1, E\right) : K(\tilde{V}_1) \subset B_f(a, \delta)\}.$$

X est clairement un sous-espace fermé du complet $\mathcal{C}^0_b\left(\tilde{V}_1, E\right)$ muni de la distance uniforme. On a $\mathsf{Id}_{\tilde{V}_1} \in X$.

Nous remarquons que l'application $K \mapsto \mathsf{Id}_{\tilde{V}_1} - \varphi \circ K$ définie de X à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\tilde{V}_1, E)$ est en fait à valeurs dans $\{K \in \mathcal{C}^0\left(\tilde{V}_1, E\right) : K(\tilde{V}_1) \subset B(a, \delta)\}$. De plus, cette application est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

Par le théorème du point fixe cette application possède donc un unique point fixe K_0 qui appartient même à $\{K \in \mathcal{C}^0\left(\tilde{V}_1, E\right) : K(\tilde{V}_1) \subset B(a, \delta)\}$.

On a, pour $y \in \tilde{V}_1$:

$$y = K_0(y) + \varphi(K_0(y)) = \tilde{H}(K_0(y)).$$

Posons alors $\tilde{V}_1 = B\left(a, \frac{\delta}{2}\right)$ et $U_1 = \tilde{H}^{-1}(\tilde{V}_1) \cap B(a, \delta)$. Ces deux ensembles sont des ouverts qui contiennent a. Alors $\tilde{H} : U_1 \to \tilde{V}_1$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et son inverse K_0 est continu par construction.

On peut alors utiliser la Proposition 6.4 et en particulier le point (8) pour voir que $\tilde{H} : U_1 \to \tilde{V}_1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme .

On remarque alors que $H = A \circ \tilde{H} : U_1 \to A(\tilde{V}_1) = V_1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre les ouverts U_1 (contenant a) et V_1 (contenant $H(a)$).

□

7.2. Théorème des fonctions implicites.

Théorème 7.2. *Soient E, F, G trois espaces de Banach et U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.*

On suppose qu'il existe $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$ et que $\partial_2 f(a, b) : F \to G$ est bijective.

Alors il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant (a, b), un ouvert $V \subset E$ contenant a et une application $g : V \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$(x, y) \in U' \text{ et } f(x, y) = 0$$

équivaut à :

$$x \in V \text{ et } y = g(x).$$

En particulier, on a : $g(a) = b$ et pour $x \in V$, on a la formule :

$$dg_x = -(\partial_2 f_{(x,g(x))})^{-1} \circ \partial_1 f_{(x,g(x))}.$$

Démonstration. On va appliquer le théorème d'inversion locale. On définit $\varphi : U \to E \times G$ par $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Sa différentielle au point (a, b) est donnée pour $(h, k) \in E \times F$ par :

$$d\varphi_{(a,b)}(h, k) = (h, \partial_1 f_{(a,b)}(h) + \partial_2 f_{(a,b)}(k)).$$

En écrivant $(h', k') = (h, \partial_1 f_{(a,b)}(h) + \partial_2 f_{(a,b)}(k))$, on est amené à :

$$h = h', \quad k = (\partial_2 f_{(a,b)})^{-1}(k' - \partial_1 f_{(a,b)}(h')).$$

$d\varphi_{(a,b)}$ est donc inversible d'inverse (continu) défini pour $(h', k') \in E \times G$:

$$(d\varphi_{(a,b)})^{-1}(h', k') = (h', (\partial_2 f_{(a,b)})^{-1}(k' - \partial_1 f_{(a,b)}(h'))).$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe donc un ouvert $U' \subset U \subset E \times F$ contenant (a, b) et un ouvert $U'' \subset E \times G$ contenant $(a, 0)$ tels que $\varphi : U' \to U''$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Notons ψ son inverse. ψ est de la forme $(x, z) \mapsto (x, \psi_2(x, z))$.

On définit l'ensemble $V = \{x \in E : (x,0) \in U''\}$ qui est un ouvert de E (image réciproque de l'ouvert U'' par une fonction continue). Les assertions

$$(x,y) \in U' \text{ et } f(x,y) = 0,$$

$$(x,0) \in U'' \text{ et } (x,y) = \psi(x,0) = (x, \psi_2(x,0)),$$

$$x \in V \text{ et } y = g(x) := \psi_2(x,0)$$

sont équivalentes.

Pour la formule, on écrit, pour $x \in V$:

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Les fonctions étant $\mathcal{C}^1$, on obtient par dérivation des fonctions composées :

$$\partial_1 f_{(x,f(x))} + \partial_2 f_{(x,g(x))} \circ dg_x = 0.$$

□

Remarque 7.3. Dans les théorèmes, on peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. La vérification est élémentaire.

7.3. **Application à la géométrie.**

7.3.1. *Surfaces de* $\mathbb{R}^3$. Nous présentons dans cette sous-section quelques applications à la géométrie locale des surfaces de $\mathbb{R}^3$.

Soit U un ouvert non vide $\mathbb{R}^3$. On considère :

$$S = \{x \in U : H(x) = 0\}.$$

Soit $a \in S$ tel que $dH_a \neq 0$.

On peut supposer par exemple que $\partial_3 H(a) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert V contenant (a_1, a_2), un ouvert W contenant a_3 et une application $\mathcal{C}^1$, $\phi : V \to W$, tels que :

$$H(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x \in V \times W$$

soit équivalent à :

$$x_3 = \phi(x_1, x_2), \quad x_3 \in W, (x_1, x_2) \in V.$$

On pose :

$$\Phi(x) = (x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)).$$

Montrons que $\ker(dH_a) = \Im(d\Phi_{(a_1,a_2)})$ (cet espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan tangent à S en a). On écrit :

$$H(\Phi(x)) = 0.$$

En dérivant, il vient :

$$dH_a(d\Phi_{(a_1,a_2)}) = 0.$$

L'image est donc incluse dans le noyau. L'égalité des dimensions fournit l'égalité des espaces.

7.3.2. *Notion de sous-variété de* $\mathbb{R}^n$. On peut donner une généralisation des considérations précédentes. On appelle sous-variété de dimension p (et de classe $\mathcal{C}^r$) de $\mathbb{R}^n$ un sous-ensemble qui est localement (au voisinage de chacun de ses points) de la forme :

$$S = \{f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_{n-p}(x) = 0\},$$

où f_j est $\mathcal{C}^r$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $df = (df_1, \cdots, df_{n-p}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ est surjective en tout point. Montrons qu'au voisinage de $a \in S$, on peut donner une paramétrisation de classe $\mathcal{C}^r$ de S. Sans perte de généralité, on prend $a = 0$. On complète la famille de formes linéaires $(df_1, \cdots, df_{n-p})$ en une base : $(df_1, \cdots, df_{n-p}, g_1, \cdots g_p)$.

On pose :

$$F(x) = (f_1(x), \cdots, f_{n-p}(x)), g_1(x), \cdots, g_p(x)).$$

Par inversion locale, F est localement au voisinage de a un $\mathcal{C}^r$-difféomorphisme. On introduit alors ϕ de classe $\mathcal{C}^r$:

$$\phi(y_{n-p+1}, \cdots, y_n) = F^{-1}(0, \cdots, 0, y_{n-p+1}, \cdots, y_n).$$

Il s'agit de caractériser l'image de $d_{(0,\cdots,0)}\phi$. Un calcul très simple fournit, pour $v \in \mathbb{R}^p$:

$$d_{(0,\cdots,0)}\phi(v) = (dF^{-1})_{(0,\cdots,0)}(0, \cdots, 0, v)$$

ou encore, de façon équivalente :

$$(dF)_{(0,\cdots,0)}(d_{(0,\cdots,0)}\phi(v)) = (0, \cdots, 0, v).$$

Autrement dit w est dans l'image de $d_{(0,\cdots,0)}\phi$ si et seulement s'il appartient à tous les noyaux des $(df_i)_a$.

7.3.3. *Théorème des extrema liés.*

Théorème 7.4. *Soient $H, f_1, \cdots, f_p$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $a \in U$. Considérons :*

$$X = \{x \in U : f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_p(x) = 0\}.$$

Supposons que les formes $(df_j)_a$ sont indépendantes. Alors, les formes $dH_a, (df_1)_a, \cdots, (df_p)_a$ sont liées.

Démonstration. Nous allons donner une nouvelle représentation de M au voisinage de a. Par commodité, on suppose que $a = 0$. Les formes $(df_j)_a$ sont indépendantes, on peut donc les compléter en une base : $((df_1)_a, \cdots, (df_p)_a, g_{p+1}, \cdots, g_m)$.

Cela invite à introduire l'application de $U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ définie par :

$$F(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x)), g_{p+1}(x), \cdots, g_m(x)).$$

Par un calcul évident, on a : $dF_a = ((df_1)_a, \cdots, (df_p)_a, g_{p+1}, \cdots, g_m)$ qui est inversible. Le théorème d'inversion locale s'applique donc. Il existe un voisinage ouvert V contenant a et un voisinage ouvert W de $F(a)$ tels que $F : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Considérons $\tilde{W}$ l'ensemble des $y_{p+1}, \cdots, y_m$ vérifiant $(0, \cdots, 0, y_{p+1}, \cdots, y_m)$. $\tilde{W}$ est un ouvert qui contient $(0, \cdots, 0)$.

On pose :

$$\phi(y_{p+1}, \ldots, y_m) = F^{-1}(0, \cdots, 0, y_{p+1}, \cdots, y_m) \in M \cap V, \quad (y_{p+1}, \ldots, y_m) \in \tilde{W}.$$

ϕ est une bijection $\mathcal{C}^1$. On considère maintenant :

$$\tilde{H}(y_{p+1}, \ldots, y_m) := H(\phi(y_{p+1}, \ldots, y_m)).$$

Par hypothèse, $\tilde{H}$ admet un extremum local en $(0, \cdots, 0)$. Cela se traduit par :

$$d_a H \circ d_{(0,\cdots,0)}\phi = 0.$$

Il s'agit de caractériser l'image de $d_{(0,\cdots,0)}\phi$. Un calcul très simple fournit, pour $v \in \mathbb{R}^{m-p}$:

$$d_{(0,\cdots,0)}\phi(v) = (dF^{-1})_{(0,\cdots,0)}(0, \cdots, 0, v)$$

ou encore, de façon équivalente :

$$(dF)_{(0,\cdots,0)}(d_{(0,\cdots,0)}\phi(v)) = (0, \cdots, 0, v).$$

Autrement dit w est dans l'image de $d_{(0,\cdots,0)}\phi$ si et seulement s'il appartient à tous les noyaux des $(df_i)_a$. On a donc montré que :

$$d_a H = 0 \text{ sur } \cap_{i=1}^{p} \ker((df_i)_a).$$

C'est alors un résultat classique d'algèbre linéaire qui permet de conclure (compléter cet ensemble de formes linéaires en une base et introduire la base antéduale). $\square$

7.4. **Exercices.**

Exercice 1. Montrer que l'application $\Phi : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $(0,+\infty) \times (-\pi,\pi)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$ où D est le demi-axe des réels négatifs. Si $f(x,y) = g(r,\theta)$, donner les relations entre les dérivées partielles de f et celles de g.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que df_a soit inversible pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Montrer que f est ouverte, puis que f est propre. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé et que f est surjective.

Exercice 3. On note $< x,y >$ le produit scalaire canonique de x et y dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que :

$$< f(x) - f(y), x - y > \geq \|x-y\|^2, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que cette inégalité est équivalente à :

$$< df_a(u), u > \geq \|u\|^2, \quad \forall a,u \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé et ouvert. En déduire que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomoprhisme d'inverse lipschitzien.

Exercice 4. Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(\lambda,x,y) = (u,v) = (\lambda + \lambda x - y - x^3, x + \lambda y - y^3)$.

(1) Montrer que l'équation $\Phi(\lambda,x,y) = 0$ permet de définir au voisinage de $(0,0,0)$ deux fonctions $x(\lambda)$ et $y(\lambda)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]-\delta,\delta[$.
(2) On pose : $h(\lambda,x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\lambda,x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(\lambda,x,y)$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en $(0,0,0)$.
(3) On pose $H(\lambda) = h(\lambda, x(\lambda), y(\lambda))$. Quel est le signe de $H(\lambda)$ pour λ petit ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,u,v) \mapsto (xe^{u^2-v^2} - y\sin v, y^2\cos u + x\sin v)$ et soit $p_0 = (0,1,\pi/2,0)$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ tels que $(0,1) \in U$ et $(\pi/2,0) \in V$ et $g : U \to V$ tels que :

$$f(x,y,g(x,y)) = 0, \quad \text{pour } (x,y) \in U.$$

Calculer $dg_{(0,1)}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z + \sin(yz) + x^2e^y$. Montrer que l'équation $f(x,y,z) = 0$ définit un voisinage de $(0,0,0)$ et une fonction $z = \phi(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner le DL d'ordre 2 de ϕ en $(0,0)$.

Exercice 7. On considère :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3+y^3+z^3+t^2 & = & 0 \\ x^2+y^2+z^2+t & = & 2 \\ x+y+z+t & = & 0 \end{array}\right. .$$

Vérifer que $(0,-1,1,0)$ est une solution. Montrer que ce système détermine un voisinage de $t=0$ et trois fonctions $t\mapsto x(t), t\mapsto y(t), t\mapsto z(t)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $x(0)=0, y(0)=-1, z(0)=1$. Calculer la dérivée de $t\mapsto (x(t),y(t),z(t))$.

Exercice 8. Sur quels ouverts de $\mathbb{R}^2$, les applications suivantes sont-elles des difféomorphismes locaux ?

$$z\mapsto e^z, \quad z\mapsto z^2.$$

Exercice 9. On note E l'espace des matrices réelles de taille n et S le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0\in S$, inversible. Soit $\phi : E\to S$ définie par :

$$\phi(M) = {}^tMA_0M.$$

(1) Montrer que $d\phi_{\mathsf{Id}}$ est surjective. Donner son noyau.

(2) Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 et une application $A\mapsto M$ de V à valeurs dans les matrices inversibles telle que :

$$A = {}^tMA_0M.$$

On pourra introduire l'ensemble F des $M\in E$ telles que $A_0M\in S$ et appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de ϕ à F.

Exercice 10. Soit $f : U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert contenant l'origine. On suppose que 0 est un point critique non dégénéré de f, c'est à dire : $df_0=0$ et d^2f_0 est une forme quadratique non dégénérée, de signature $(p,n-p,0)$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ϕ entre deux voisinages de l'origine tel que $\phi(0)=0$ et :

$$f(x)-f(0) = u_1^2+\cdots u_p^2-u_{p+1}^2-\cdots-u_n^2,$$

où $\phi(x)=u$.