ESPACES DE HILBERT

Table des matières

Les espaces hilbertiens généralisent de façon algébrique et topologique à la dimension infinie la notion d'espace euclidien (ou hermitien dans le cas complexe). Il s'agit donc d'espaces de Banach dont la norme est associée à un produit scalaire. On peut ainsi utiliser (avec quelques précautions) l'intuition géométrique de l'espace euclidien pour travailler sur ces espaces. Nous prendrons comme corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Généralités

1.1. **Espaces préhilbertiens.**

Définition 1.1. Sur un $\mathbb{R}$- (resp. $\mathbb{C}$-) espace vectoriel H, on appelle produit scalaire toute forme i) bilinéaire (resp. sesquilinéaire) ii) symétrique (resp. hermitienne) iii) définie iv) positive. On le note usuellement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et les hypothèses ci-dessus s'écrivent précisément de la façon suivante. Pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

i) linéarité à droite :
$$\langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \, ,$$
et (anti)linéarité à gauche :
$$\langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \, ,$$

ii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,

iii) $(\langle x, x \rangle = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$,

iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$.

Remarque 1.2. Les conditions i)...iv) ont été écrites ci-dessus pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ avec antilinéarité à gauche. Certains auteurs mettent l'antilinéarité à droite. C'est simplement une question de convention. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\overline{\lambda} = \lambda$ de telle sorte que la sesquilinéarité se réduit à la bilinéarité et de même le caractère hermitien ii) se ramène à la symétrie.

Définition 1.3. On appelle espace préhilbertien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Donnons quelques exemples que nous rencontrerons constamment.

Exemple 1.4.

(i) Considérons le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H = \mathbb{C}^n$ muni de l'application définie, pour tout $u, v \in \mathbb{C}^n$, par
$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} v_k \, .$$
Alors $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

(ii) Considérons l'expace des suites complexes de carré intégrable $\ell^2(\mathbb{Z})$ muni de l'application définie de la façon suivante

$$\forall u, v \in \ell^2(\mathbb{N})\,, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{u_k} v_k\,.$$

On peut facilement vérifier, en observant que $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$, que cette application est bien définie. De plus, $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

(iii) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f} g \,\mathrm{d}x\,.$$

Comme dans l'exemple qui précède, cette application est bien définie (car $\overline{f}g$ est intégrable) et définit un produit scalaire qui fait de $L^2(\Omega)$ un espace préhilbertien.

Proposition 1.5 (Cauchy-Schwarz)**.** *Dans un espace préhilbertien H, on a*

$$\forall x, y \in H,\ |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\ ,$$

où on a posé

$$\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}\,.$$

Démonstration. Soit $x, y \in H$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\,(\lambda\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle\,.$$

On prend $\lambda = t\overline{\langle x, y\rangle}$ et cela donne

$$t^2\,|\langle x, y\rangle|^2\,\langle y, y\rangle + 2\,|\langle x, y\rangle|^2\, t + \langle x, x\rangle \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Le discriminant du polynôme en t doit donc être négatif ou nul, ce qui donne $|\langle x, y\rangle|^4 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\,|\langle x, y\rangle|^2 \leq 0$ ou encore

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\,.$$

□

Remarque 1.6. Dans la preuve précédente, nous n'avons pas utilisé le caractère "défini" du produit scalaire.

Exemple 1.7. Nous pouvons reprendre l'exemple précédent et en déduire les inégalités suivantes :

(i) Pour tout $u, v \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^n \overline{u_k} v_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

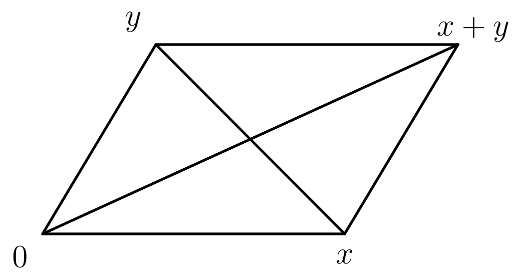

FIGURE 1. Parallélogramme

(ii) Pour tout $u, v \in \ell^2(\mathbb{N})$, on a

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{u_k} v_k\right| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

(iii) Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\left|\int_\Omega \overline{u} v \,\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Corollaire 1.8. *Sur un espace préhilbertien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, la quantité $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ définit une norme.*

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous $x, y \in H$, on a
— $|\lambda x| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = |\lambda| \langle x, x\rangle^{1/2} = |\lambda| \, \|x\|$.
— $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (\langle x, x\rangle = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.
— On a

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

et on obtient

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Ainsi, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur H. $\square$

Proposition 1.9 (Identité du parallélogramme)**.** *Dans un espace préhilbertien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, on a*

$$\forall x, y \in H , \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) .$$

Remarque 1.10. Interprétation géométrique de l'identité ci-dessus pour le parallélogramme de sommets $(0, x, x+y, y)$: la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés. Une autre version appelée identité de la médiane dit que la somme des carrés des médianes des deux triangles $(0, x, y)$ et $(0, x, x+y)$ est égale à la médiane (moyenne) des carrés

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y^2\|\right) .$$

Définition 1.11. On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ de H est orthogonale (resp. orthonormée) si

$$\begin{aligned} &\forall i, j \in I, i \neq j,\ \langle x_i, x_j\rangle = 0 \\ \text{resp.} \qquad &\forall i, j \in I,\ \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Proposition 1.12. *Si* $(x_1, \ldots, x_N)$ *est une famille* ***finie*** *orthogonale on a*

$$\|x_1 + \cdots + x_N\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_N\|^2 .$$

Démonstration. Par récurrence, il s'agit de montrer cela pour $N = 2$. On a

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x_1, x_2\rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 .$$

□

Exemple 1.13. Reprenons encore une fois nos exemples favoris.

(i) Dans l'espace $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (muni de son produit scalaire canonique), la base canonique est une famille orthonormée. Donner une base orthornormée de $\mathbb{C}^2$ qui ne soit pas la base canonique.

(ii) Dans l'espace $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, la famille infinie $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ donnée par $e_j(n) = \delta_{jn}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ est orthonormée. Noter que cette famille **n'est pas une base** de $\ell^2(\mathbb{N})$. Si $u \in \ell^2(\mathbb{N})$, que peut-on dire de

$$\lim_{j\to+\infty} \langle u, e_j\rangle \ ?$$

(iii) Lorsque Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$, il est délicat d'exhiber des familles orthonormées explicites. Quand $\Omega = \mathbb{R}$, nous en donnerons un exemple. On peut en tout cas trouver facilement une famille orthogonale. Considérons en effet les deux fonctions (non nulles) données par $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = xe^{-x^2}$. On a $\langle f, g\rangle = 0$. Que valent les normes de f et g ?

(iv) Donnons un autre exemple d'espace préhilbertien et de famille orthonormée très utiles. On considère l'espace $H = L^2_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques et localement de carré intégrable. Nous introduisons la forme définie pour tous $f, g \in H$ par

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g \,\mathrm{d}x\,.$$

Il s'agit d'un produit scalaire. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $e_n(x) = e^{inx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$ est une famille orthonormée. Noter que la réunion des familles $(\sqrt{2}\cos(nx))_{n\geq 1}$ et $(\sqrt{2}\sin(nx))_{n\geq 1}$ est aussi une famille orthonormée.

Établir que, pour tout $f \in H$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|^2 = \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \langle e_n, f\rangle e_n \right\|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |\langle e_n, f\rangle|^2\,,$$

puis que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_n, f\rangle|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

Cette dernière inégalité est appelée inégalité de Bessel et nous la retrouverons plus tard. Comment appelle-t-on classiquement la quantité $\sum_{n=-N}^{N}\langle e_n, f\rangle e_n$ associée à la fonction f ?

Il se trouve qu'on peut toujours trouver des familles orthonormales dans un espace préhilbertien. La proposition suivante est surtout importante par sa preuve algorithmique, appelée procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Proposition 1.14. *Soit H un espace préhilbertien. Considérons une famille libre de vecteurs $u_1, \ldots, u_N$ de H. Il existe une famille orthonormée $(e_j)_{1\leq j\leq N}$ telle que*

$$\operatorname*{Vect}_{1\leq j\leq N} u_j = \operatorname*{Vect}_{1\leq j\leq N} e_j\,.$$

Démonstration. Pour $N = 1$, comme $u_1 \neq 0$, l'énoncé est clair en posant $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$.

Pour $N = 2$, on peut déjà écrire que

$$\mathrm{vect}(u_1, u_2) = \mathrm{vect}(e_1, u_2)\,.$$

Considérons $\tilde{e}_2 = u_2 - \alpha e_1$ pour un α à déterminer. On a

$$\mathrm{vect}(u_1, u_2) = \mathrm{vect}(e_1, \tilde{e}_2)\,.$$

On choisit α de sorte que $\langle \tilde{e}_2, e_1\rangle = 0$. On trouve $\alpha = \langle u_2, e_1\rangle$. Comme $\tilde{e}_2 \neq 0$, il reste à poser $e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|}$ et on a

$$\mathrm{vect}(u_1, u_2) = \mathrm{vect}(e_1, e_2)\,.$$

Soit $N \geq 2$. Supposons que la propriété soit vraie. Considérons une famille libre $u_1, \dots, u_{N+1}$. Comme $u_1, \dots, u_N$ est libre, on peut écrire :

$$\underset{1\leq j\leq N+1}{\mathrm{Vect}}\, u_j = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_N, u_{N+1})\,,$$

où $e_1, \dots, e_N$ est une famille orthonormée. On pose

$$\tilde{e}_{n+1} = u_{N+1} - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j\,,$$

et on choisit les α_j de sorte que $\langle \tilde{e}_{N+1}, e_j\rangle = 0$, ce qui conduit à

$$\alpha_j = \langle u_{N+1}, e_j\rangle\,.$$

À nouveau, $\tilde{e}_{N+1} \neq 0$ et la conclusion s'ensuit aisément. $\square$

Exemple 1.15. On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\,,$$

et on pose, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle x, y\rangle_A = \langle Ax, y\rangle\,.$$

Donner une base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot\rangle_A$.

Exemple 1.16. On considère $H = \mathbb{R}[X]$ muni de l'application

$$\langle P, Q\rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x\,.$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire sur H.
2) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$. Et pour $\mathbb{R}_4[X]$?
3) Montrer qu'il existe une unique famille orthonormée (P_n) de $\mathbb{R}[X]$ avec $\deg P_n = n$ et telle que P_n a un coefficient dominant positif.
4) Montrer que P_n possède exactement n racines réelles qui sont simples.
5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-P_n'' + 2xP_n' = 2nP_n\,.$$

   On pourra observer que

$$\langle -P_n'' + 2xP_n', P_k\rangle = 0\,, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}\,,$$

   et examiner le coefficient dominant de $-P_n'' + 2xP_n'$.
6) Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n > 0$ tel que

$$-P_n' + 2xP_n = \alpha_n P_{n+1}\,.$$

7) Calculer $\| -P_n' + 2xP_n\|^2$ (à l'aide d'une intégration par parties et de la question 5)) et en déduire la valeur de α_n.
8) On pose :
$$H_n = P_n e^{-\frac{x^2}{2}} .$$
Montrer que la famille (H_n) est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $L^2(\mathbb{R})$ et que
$$-H_n'' + x^2 H_n = (2n+1)H_n .$$

1.2. **Espaces hilbertiens, théorème de la projection.**

1.2.1. *Généralités et premiers exemples.*

Définition 1.17. Un espace de Hilbert (ou hilbertien) est un espace préhilbertien complet.

Exemple 1.18. Nous avons déjà rencontré des espaces de Hilbert. Par exemple, $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert. Il est complet car il est de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet.

Nos autres exemples de références sont aussi des espaces de Hilbert, mais cela requiert quelques explications supplémentaires.

Proposition 1.19. $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Considérons une suite de Cauchy (u^n) d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on a
$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k^n - u_k^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u^n - u^m\|_2 \leq \varepsilon .$$
En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$|u_k^n - u_k^m| \leq \varepsilon .$$
La suite $(u_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$ et ainsi elle converge vers un nombre u_k^∞. Vérifions que $(u_k^\infty)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$.

Prenons $\varepsilon = 1$. Pour tout $m, n \geq N$ et tout $M \in \mathbb{N}$,
$$\left(\sum_{k=0}^{M} |u_k^n - u_k^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 .$$
On fait tendre m vers $+\infty$ et on trouve
$$\left(\sum_{k=0}^{M} |u_k^n - u_k^\infty|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

et, par l'inégalité triangulaire

$$\left(\sum_{k=0}^{M}|u_k^\infty|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1+\left(\sum_{k=0}^{M}|u_k^n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1+\|u^n\|_{\ell^2(\mathbb{N})}\,.$$

Il s'ensuit que $u^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Enfin, vérifions que u^n converge vers u^∞ dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Pour tout $M \in \mathbb{N}$ et tout $m, n \geq N$,

$$\left(\sum_{k=0}^{M}|u_k^n-u_k^m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\,.$$

On fait alors tendre m vers $+\infty$, puis $M \to +\infty$ et il vient

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k^n-u_k^\infty|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\,.$$

□

Remarque 1.20. Il existe bien sûr des espaces préhilbertiens qui ne sont pas hilbertiens. On peut montrer que l'espace de l'exemple 1.16 n'est pas de Hilbert, mais c'est un peu délicat et fait appel au théorème de Baire.

Comme les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées, on a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1.21. *Un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, muni du produit scalaire restreint à F, est un espace de Hilbert si et seulement s'il est fermé dans H.*

Ainsi, les sous-espaces de Hilbert sont les sous-espaces vectoriels fermés.

Remarque 1.22. En dimension finie, tout espace préhilbertien est un espace de Hilbert et tout sous-espace vectoriel est fermé. Cela n'est plus vrai en dimension infinie.

1.2.2. *Un exemple important d'espace de Hilbert.* L'objet de cette section est d'établir que $(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert.

Lemme 1.23. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute suite de Cauchy possédant une sous-suite convergente vers ℓ converge vers ℓ.*

Proposition 1.24. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si la convergence absolue des séries à valeurs dans E entraîne leur convergence.*

Démonstration. Supposons que $(E, \|\cdot\|)$ soit tel que toute série absolument convergente soit convergente. Montrons qu'il s'agit d'un espace de Banach. Considérons une suite de Cauchy (u_n). Alors on peut construire par récurrence une suite extraite $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ telle que

$$\|v_{n+1} - v_n\| \leq \frac{1}{2^n} .$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0}(v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente dans E. Elle est donc convergente. Cela entraîne la convergence de (v_n) et le lemme précédent implique la convergence de (u_n). □

Nous pouvons maintenant établir la proposition fondamentale suivante.

Proposition 1.25 (Fischer-Riesz)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1, +\infty]$. L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach. En particulier, $(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Laissons de côté le cas $p = \infty$ et considérons $p \in [1, +\infty[$. Considérons une suite de fonctions (f_n) de $L^p(\Omega)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty .$$

On peut considérer la fonction

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} |\tilde{f}_n| ,$$

qui est une fonction mesurable positive (les $\tilde{f}_n$ sont des représentants des f_n). On a

$$\|S\|_p \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty .$$

Ainsi, $S \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et S est donc finie presque partout. Il existe donc un ensemble de mesure nulle N tel que pour tout $x \in \Omega \setminus N$, $S(x)$ est finie, c'est-à-dire tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\tilde{f}_n(x)| < +\infty$. Pour tout $x \in \Omega \setminus N$, on peut donc considérer

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{f}_n(x) .$$

Pour $x \in N$, on pose $F(x) = 0$. Il est clair que $F \in L^p(\Omega)$. Reste à voir que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge vers F dans $L^p(\Omega)$. On a :

$$\left\| F - \sum_{n=0}^{N} \tilde{f}_n \right\|_p = \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \tilde{f}_n \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|\tilde{f}_n\|_p \underset{N\to+\infty}{\to} 0 .$$

□

Remarque 1.26. Si (f_n) converge vers f dans L^p, alors elle est de Cauchy et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^n}\,.$$

La preuve précédente montre que $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ converge pour presque tout x, c'est-à-dire que $(f_n(x))$ converge pour presque tout x.

1.2.3. *Théorème de la projection.* Le théorème qui suit bien que très intuitif en dimension finie repose essentiellement sur la propriété de complétude. C'est le résultat fondamental associé à la structure hilbertienne. À partir de là, on démontre tout le reste.

Théorème 1.27 (de la projection)**.** *Si C est un convexe fermé d'un espace de Hilbert H, on a les résultats suivants :*

a) Pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_C \in C$ tel que

$$\|x - x_C\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|\ .$$

On appelle x_C projection de x sur C et on note $x_C = P_C(x)$.

b) Le point $x_C = P_C(x)$ est caractérisé par

$$\forall y \in C,\ \mathrm{Re}\,\langle x - x_C, y - x_C\rangle \leq 0\,.$$

c) Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H, la caractérisation s'écrit

$$\forall y \in C, \langle x - x_C, y\rangle = 0 \qquad (x - x_C \textit{ orthogonal à } C)\,.$$

d) La projection P_C est une contraction $H \to C$, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in H\,, \quad \|P_C(y) - P_C(x)\| \leq \|x - y\|\ .$$

Démonstration.

a) **Unicité :** Si $x_C^1 = x_C^2$ sont des minima pour la fonction $\|x - .\| \in \mathbb{R}$ définie sur C, alors comme C est convexe le milieu $\frac{x_C^1 + x_C^2}{2}$ appartient à C et on a

$$\left\|x_C^1 - x_C^2\right\|^2 = 2\left(\left\|x - x_C^1\right\|^2 + \left\|x - x_C^2\right\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{x_C^1 + x_C^2}{2}\right\|^2 \leq 0.$$

On a nécessairement $x_C^2 = x_C^1$.

Nous devons montrer l'**existence**.

Soit $x \in H$. La fonction $C \ni y \to \|x - y\| \in \mathbb{R}$ est minorée par 0 donc admet une borne inférieure ≥ 0. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C minimisante, i.e. telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|\,.$$

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, l'identité du parallélogramme (Prop. 1.9) donne

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 =& \|(x-y_m)-(x-y_n)\|^2 \\ =& 2\left(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2\right) - 4\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \\ \leq& 2\left(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2\right) - 4\inf_{y\in C}\|x-y\|^2\end{aligned}$$

car $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $m, n \geq N_\varepsilon$,

$$\|y_n - y_m\| \leq \varepsilon\,.$$

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et, comme C est un fermé de H qui est complet, elle admet une limite dans C. On note $x_C = \lim_{n\to\infty} y_n$ et on a

$$x_C \in C \quad \text{et} \quad \|x - x_C\| = \lim_{n\to\infty}\|x-y_n\| = \inf_{y\in C}\|x-y\|\,.$$

b) Pour $y \in C$, on considère la fonction $[0,1] \ni t \to y_t \in C$ donnée par $y_t = (1-t)x_C + ty$. La quantité $\|x-y_t\|^2$ est un polynôme en t,

$$\|x-y_t\|^2 = \|x-x_C\|^2 + 2t\mathrm{Re}\,\langle x-x_C, x_C-y\rangle + t^2\|x_C-y\|^2\,. \tag{1.1}$$

$\Rightarrow$ Si x_C minimise $\{\|x-y\|\,,\ y\in C\}$, alors on doit avoir

$$\forall t\in[0,1],\ \|x-y_t\|^2 \geq \|x-x_C\|^2$$

et en particulier cela entraîne :

$$2t\mathrm{Re}\,\langle x-x_C, x_C-y\rangle + t^2\|x_C-y\|^2 \geq 0\,. \tag{1.2}$$

Cela implique :

$$\mathrm{Re}\,\langle x-x_C, y-x_C\rangle \leq 0\,.$$

$\Leftarrow$ Si l'inégalité ci-dessus est vérifiée alors l'expression (1.1) donne

$$\|x-x_C\|^2 \leq \|x-y\|^2\,.$$

c) Si C est un sous-espace vectoriel alors $y + x_C$ appartient à C quand $y \in C$. Le critère du b) devient alors :

$$\forall y\in C,\ \mathrm{Re}\,\langle x-x_C, y\rangle \leq 0\,.$$

Or, si $y \in C$, on a aussi $-y \in C$, d'où la reformulation :

$$\forall y\in C,\ \mathrm{Re}\,\langle x-x_C, y\rangle = 0\,.$$

Pour le cas réel, cela donne la conclusion. Pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on remarque que si $y \in C$, on a aussi $iy \in C$; il vient :

$$\forall y\in C,\ \mathrm{Im}\,\langle x-x_C, y\rangle = 0\,.$$

Cela s'écrit tout simplement : $\langle x - x_C, y\rangle = 0,\ \forall y \in C$.

d) Pour $x, y \in H$ on note $x_C = P_C(x)$, $y_C = P_C(y)$, $\Delta x = x - x_C$ et $\Delta y = y - y_C$. En écrivant $x = x_C + \Delta x$ et $y = y_C + \Delta y$ on obtient

$$\|y - x\|^2 = \|y_C - x_C\|^2 + \|\Delta y - \Delta x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle y_C - x_C, \Delta y - \Delta x\rangle\ .$$

Or, le dernier terme vaut

$$2\mathrm{Re}\,(y_C - x_C, \Delta y - \Delta x) = 2\mathrm{Re}\,\langle y_C - x_C, y - y_C\rangle \\ - 2\mathrm{Re}\,\langle y_C - x_C, x - x_C\rangle\ .$$

C'est une somme de deux nombres positifs ou nuls.

□

Corollaire 1.28 (Projection sur un sous-espace de dimension finie)**.** *Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit une base orthonormée $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de F. Alors, pour tout $x \in H$,*

$$\Pi_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k\,.$$

En particulier,

$$\mathrm{dist}(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2}\,.$$

Démonstration. Le sous-espace F est bien fermé puisqu'il est de dimension finie et on a, pour tout $x \in H$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k, e_j \right\rangle = 0\,.$$

□

Exemple 1.29. Déterminer

$$\inf_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} |\sin x - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 \mathrm{d}x\,.$$

Pour terminer nous insistons encore sur le fait que la structure d'espace de Hilbert comme celle d'espace de Banach, combine des structures algébriques et topologiques. Par exemple, on a vu qu'un sous-espace de Hilbert est nécessairement fermé. Ainsi, si on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert H, le sous-espace de Hilbert engendré, i.e. le plus petit sous-espace de Hilbert contenant tous les x_i, doit contenir l'espace vectoriel engendré et être fermé. C'est en fait l'adhérence de l'espace vectoriel engendré. On rappelle que $\mathrm{Vect}(x_i,\ i \in I)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs x_i

$$\mathrm{Vect}(x_i,\ i \in I) = \Big\{ \sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} \alpha_i x_i \Big\},$$

tandis que le sous-espace de Hilbert engendré peut contenir des séries (sommes ou combinaisons linéaires infinies) convergentes. Cela nous amène à distinguer ces deux notions par les notations.

Définition 1.30. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs d'un espace de Hilbert H, on note $\mathrm{Vect}(x_i,\ i \in I)$ l'espace vectoriel engendré et $\mathrm{Hilb}\,(x_i,\ i \in I)$ le sous-espace de Hilbert engendré. Noter que

$$\mathrm{Hilb}\,(x_i,\ i \in I) = \overline{\mathrm{Vect}\,(x_i,\ i \in I)}\,.$$

2. Applications du théorème de la projection

Dorénavant, on travaille avec un espace de Hilbert H sur $\mathbb{K}$ dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2.1. **Sous-espace orthogonal.**

Définition 2.1. Si A est une partie de H, on appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in H,\ \forall a \in A, \langle a, x\rangle = 0\}\ .$$

Proposition 2.2. *Pour toute partie A de H, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.*

Démonstration. Pour $a \in A$, on a $a^\perp = \ker[\langle a, .\rangle]$. Or la forme linéaire $H \ni x \to \langle a, x\rangle \in \mathbb{K}$ est continue. Ainsi, $a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé. On en déduit que $A^\perp = \cap_{a\in A} a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. □

Proposition 2.3. *Pour deux parties A et B de H on a*

1) $(A \subset B) \Rightarrow \big(B^\perp \subset A^\perp\big)$.

2) $A^\perp = \big(\overline{A}\big)^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp = (\mathrm{Hilb}\, A)^\perp$.

Démonstration. 1) Pour $A \subset B$, on a tout simplement

$$B^\perp = \bigcap_{a\in B} a^\perp \subset \bigcap_{a\in A} a^\perp = A^\perp\,.$$

2) Comme $\mathrm{Hilb}\, A = \overline{\mathrm{Vect}\, A}$, il suffit de montrer les deux premières égalités.

i) Le fait que $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$ vient de 1) et de $A \subset \overline{A}$.
Montrons maintenant que $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$. Soit $x \in A^\perp$. Pour tout $a \in \overline{A}$, on peut écrire $a = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$ avec $a_n \in A$. On a alors $\langle a, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle a_n, x\rangle = 0$. Ainsi, $x \in \overline{A}^\perp$.

ii) On a $(\mathrm{Vect}\, A)^\perp \subset A^\perp$. Cela vient du 1) et de $A \subset \mathrm{Vect}\, A$.
Montrons alors que $A^\perp \subset (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$. Soit $x \in A^\perp$ et soit $y = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i$ un élément de $\mathrm{Vect}\, A$. On a $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i\langle a_i, x\rangle = 0$. Comme cela est vrai pour tout $y \in \mathrm{Vect}\, A$, on en déduit $x \in (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$.

□

Proposition 2.4. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, on a les propriétés suivantes :*

a) $H = F \oplus F^\perp$ *et P_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (projection orthogonale sur F).*

b) Si $F \neq \{0\}$ *alors* $\|P_F\| = 1$.

c) $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Démonstration.

a) Le théorème de la projection (1.27) permet de définir la projection P_F sur le convexe fermé F. Pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par

$$\forall y \in F,\ \langle y, x - P_F(x)\rangle = 0\,,$$

c'est-à-dire $x - P_F(x) \in F^\perp$. En écrivant $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ on vérifie que $H = F + F^\perp$. De plus, si $x \in F \cap F^\perp$, alors on a $(\underset{\in F}{x}, \underset{\in F^\perp}{x}) = 0$ et donc $x = 0$. On a bien $H = F \oplus F^\perp$. Enfin, l'unique décomposition $x = \underset{\in F}{P_F(x)} + \underset{\in F^\perp}{(x - P_F(x))}$ nous assure que $P_F(x)$ est bien la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

b) Si $F \neq \{0\}$, on prend $x \in F$ non nul et la norme de l'application linéaire P_F est supérieure à $\frac{\|P_F(x)\|}{\|x\|} = 1$. De plus, comme on sait que P_F est une contraction (cf. Théorème de la projection (1.27) d)), sa norme doit être inférieure ou égale à 1. On a donc $\|P_F\| = 1$.

c) La définition de l'orthogonal 2.1 donne tout de suite $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$. Pour l'inclusion inverse, on prend $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$ et on écrit

$$\|x - P_F(x)\|^2 = \left\langle \underset{\in F^\perp}{x - P_F(x)}, \underset{\in \left(F^\perp\right)^\perp}{x} \right\rangle - \left\langle \underset{\in F^\perp}{x - P_F(x)}, \underset{\in F}{P_F(x)} \right\rangle = 0\,.$$

On en déduit $x = P_F(x) \in F$.

□

Corollaire 2.5. *Pour une partie A de H, on a $(A^\perp)^\perp = \operatorname{Hilb} A$.*

Démonstration. On a vu dans la Proposition 2.3, l'égalité $A^\perp = (\operatorname{Hilb} A)^\perp$. Comme $\operatorname{Hilb} A$ est un sous-espace vectoriel fermé, on a

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left((\operatorname{Hilb} A)^\perp\right)^\perp = \operatorname{Hilb} A\,.$$

□

On obtient le corollaire très utile suivant.

Corollaire 2.6. *Un sous-espace vectoriel de H est dense si et seulement si son orthogonal est $\{0\}$.*

Démonstration. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel V de H n'est autre que $\overline{V} = \operatorname{Hilb} V$. Ainsi V est dense si et seulement si $\operatorname{Hilb} V = H$ c'est-à-dire si et seulement si $V^\perp = (\operatorname{Hilb} V)^\perp = \{0\}$. □

2.2. **Théorème de représentation de Riesz.** Pour tout $f \in H$, la forme linéaire $H \ni x \to \langle f, x \rangle \in \mathbb{K}$ est continue. Le résultat suivant donne la réciproque du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 2.7 (de représentation Riesz)**.** *Pour toute forme linéaire continue ℓ sur H, il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\forall x \in H, \quad \ell(x) = \langle f, x \rangle \,.$$

Démonstration. Soit ℓ une forme linéaire continue sur H. On note $F = \ker \ell$. C'est un sous-espace fermé puisque ℓ est continue.

a) **Existence.** On distingue deux cas : 1) Si $F^\perp = \{0\}$ alors on a $F = (F^\perp)^\perp = H$, $\ell = 0$ et on prend $f = 0$. 2) Si $F^\perp \neq \{0\}$ alors on prend $u \in F^\perp$ de norme 1. On a $\ell(u) \neq 0$ et pour $x \in H$ on a $x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} u \in \ker \ell = F$. Le produit scalaire $\left\langle u, x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} u \right\rangle$ est donc nul, ce qui donne

$$\forall x \in H \quad \ell(x) = \ell(x)\langle u, u\rangle = \ell(u)\langle u, x\rangle = \langle f, x\rangle$$

en prenant $f = \overline{\ell(u)} u$.

b) **Unicité.** Soit f_1 et f_2 deux vecteurs de H qui vérifient :

$$\forall x \in H\,, \quad \langle f_1, x\rangle = \ell(x) = \langle f_2, x\rangle, .$$

On en déduit que $f_1 - f_2 \in H^\perp$ et donc $f_1 - f_2 = 0$.

□

Remarque 2.8. Ce théorème nous dit que le dual topologique H' d'un espace de Hilbert H s'identifie à H. Attention : l'identification dépend du choix du produit scalaire.

Exemple 2.9. Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. Si $\ell : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, il existe $f \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\ell(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f \varphi \, \mathrm{d}x \,.$$

3. Bases hilbertiennes

Définition 3.1. Dans un espace de Hilbert H, on appelle base hilbertienne un système orthonormé $(e_i)_{i \in I}$ tel que $\mathrm{Hilb}(e_i,\ i \in I) = H$.

Remarque 3.2. Attention : Une base hilbertienne n'est pas une base au sens algébrique. Pour récupérer tout l'espace on ne se contente pas de faire des combinaisons linéaires finies. On passe à la limite aussi.

Exemple 3.3. Reprenons l'exemple de $\ell^2(\mathbb{N})$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$e_n(j) = \delta_{nj}$$

est une base hilbertienne.

3.1. **Un exemple important de base hilbertienne.** Reprenons l'exemple de l'espace de Hilbert $H = L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g \,\mathrm{d}x\,.$$

Nous avons déjà vu que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée infinie. Est-elle une base hilbertienne ? Nous allons répondre par l'affirmative et nous utiliserons un résultat d'approximation, appelé parfois Théorème de Fejér.

Dans cette section, on utilise la notation suivante.

Définition 3.4. Si $g, h \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$, on note

$$g \star h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-y)g(y)dx\,.$$

Nous aurons besoin des lemmes suivants (qui résultent de calculs explicites).

Lemme 3.5. *On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$,*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\,,\quad K_m = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} D_n(x)\,.$$

Alors, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$S_n := \sum_{k=-n}^{n} c_n e_n = D_n \star f\,,\quad K_n \star f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k\,.$$

Lemme 3.6. *On a $K_n(2k\pi) = n$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et, pour tout $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$,*

$$K_n(x) = \frac{1-\cos(nx)}{n(1-\cos x)}\,.$$

De plus, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1\,,$$

et pour tout $\alpha\in]0,\pi]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{\pi} K_n(x)dx = 0\,.$$

Proposition 3.7. *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$. Alors, la moyenne des sommes partielles de Fourier,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k\,,$$

qui est constituée d'éléments de $\mathrm{Vect}(e_j)$*, converge uniformément vers f sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. On examine, pour $x \in [-\pi,\pi]$,

$$K_n \star f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-y)f(y)dx - f(x)\,.$$

On a :

$$K_n \star f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)f(x-y)dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)f(x)dy$$

ou encore

$$K_n \star f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)(f(x-y)-f(x))dy\,.$$

On a

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)(f(x-y)-f(x))dy\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. f est uniformément continue sur $[-\pi,\pi]$. Soit $\alpha \in]0,\pi[$ tel que, pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ et $|y| \leq \alpha$, on ait : $|f(x-y)-f(x)| \leq \varepsilon$. On écrit alors

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy\\ &= \int_{|y|\leq\alpha} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy + \int_{\alpha<|y|\leq\pi} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy\,.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy \leq 2\pi\varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\alpha<|y|\leq\pi} K_n(y)dy\,.$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite. □

Corollaire 3.8. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.*

Corollaire 3.9. *La réunion de la fonction constante* 1, $(\sqrt{2}\cos(nx))_{n\geq1}$ *et* $(\sqrt{2}\sin(nx))_{n\geq1}$ *forme une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.*

Corollaire 3.10. *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$. Si la série de Fourier de f converge en x, sa limite est $f(x)$. Si de plus $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(x)$ est une série convergente et*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(x)\,,$$

et il y a convergence normale.

3.2. **De l'existence des bases hilbertiennes en général.** Nous allons étudier l'existence d'une base hilbertienne dans le cas précis où H est séparable et nous commençons par un lemme portant sur la séparabilité.

Lemme 3.11. *Un espace de Hilbert H est séparable si et seulement si il existe une famille dénombrable $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $H = \mathrm{Hilb}\,(x_n, n \in \mathbb{N})$.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si H est séparable une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans H vérifie $H = \mathrm{Hilb}\,(x_n, n \in \mathbb{N})$. $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathrm{Hilb}\,(x_n,\ n \in \mathbb{N}) = H$ c'est-à-dire $\mathrm{Vect}\,(x_n,\ n \in \mathbb{N})$ dense dans H. On peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la famille $\{\tilde{x}_n\,, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille libre et

$$H = \mathrm{Hilb}\,(\tilde{x}_n, n \in \mathbb{N})\ .$$

On considère alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$V_k = \underset{0\le n\le k}{\mathrm{Vect}}\,(\tilde{x}_n)\,.$$

On a

$$\mathrm{Vect}\,(\tilde{x}_n, n \in \mathbb{N}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k\,.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble $\bigoplus_{n=0}^{k} \mathbb{Q}\tilde{x}_n$ est dénombrable ($\mathbb{Q}$ est dénombrable) et dense dans V_k. On pose alors

$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigoplus_{n=0}^{k} \mathbb{Q}\tilde{x}_n \right)\ .$$

Il est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables et il reste à vérifier qu'il est dense. Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe g_ε appartenant à un certain V_{k_ε} telle que $\|f - g_\varepsilon\| \le \varepsilon/2$. Comme $\bigoplus_{n=0}^{k_\varepsilon} \mathbb{Q}\tilde{x}_n$ est dense dans V_{k_ε}, on peut trouver $h_\varepsilon \in \bigoplus_{n=0}^{k_\varepsilon} \mathbb{Q}\tilde{x}_n$ tel que $\|g_\varepsilon - h_\varepsilon\| \le \varepsilon/2$. On a trouvé $h_\varepsilon \in D$ tel que $\|f - h_\varepsilon\| \le \varepsilon$. $\square$

Proposition 3.12. *Tout espace de Hilbert séparable possède une base hibertienne.*

Démonstration. Si H est séparable, on a $H = \mathrm{Hilb}(x_n, n \in \mathbb{N})$ et on considère comme dans la démonstration du Lemme 3.11 la suite (croissante) de sous-espaces de dimension finie $V_k = \mathrm{Vect}\,(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$. On utilise le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. On obtient ainsi une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $(e_k, e_{k'}) = \delta_{kk'}$ et $\mathrm{Hilb}\,(e_k, k \in \mathbb{N}) = \mathrm{Hilb}\,(x_n, n \in \mathbb{N}) = H$. $\square$

Pour s'assurer de l'existence d'une base hilbertienne, il s'agit donc de vérifier la séparabilité de H. Dans la pratique, cette séparabilité provient de divers résultats de densité dans des espaces fonctionnels classiques.

Exemple 3.13. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^2(\Omega, dx)$ ("fonctions" L^2 à valeurs dans $\mathbb{K}$) muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x$$

est séparable et possède donc une base hilbertienne. Expliquons cela.

L'ouvert Ω peut s'écrire comme union d'une suite croissante de compacts

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\,.$$

Si f est un élément quelconque de $L^2(\Omega,\,\mathrm{d}x)$, la suite de terme $1_{K_n}(x)f(x)$ converge vers f dans $L^2(\Omega,\,\mathrm{d}x)$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver n_ε tel que

$$\left\|f - 1_{K_{n_\varepsilon}} f\right\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

De plus, on sait (cf. Cours d'Intégration) que $\mathcal{C}^0\,(K_{n_\varepsilon})$ est dense dans $L^2(K_{n_\varepsilon},\,\mathrm{d}x)$ et on peut trouver une fonction $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(K_{n_\varepsilon})$ telle que

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_{L^2(K_{n_\varepsilon})} \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Le théorème de Stone-Weierstrass nous dit qu'on peut approcher φ_ε par des polynômes en norme de la convergence uniforme. Or, comme la mesure $|K_{n_\varepsilon}| = \int_{K_{n_\varepsilon}} 1\,\mathrm{d}x$ est finie, l'estimation

$$\forall \psi \in \mathcal{C}^0(K_{n_\varepsilon})\,, \quad \|\psi\|^2_{L^2(K_{n_\varepsilon})} = \int_{K_{n_\varepsilon}} |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x \le |K_{n_\varepsilon}|\,\|\psi\|^2_\infty$$

nous dit qu'on peut trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ (et dans le cas complexe $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d, \overline{X_1}, \dots, \overline{X_d}]$) tel que

$$\|\varphi_\varepsilon - P\|_{L^2(K_{n_\varepsilon})} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors $\left\|f - 1_{K_{n_\varepsilon}} P\right\| \le \varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$.

Autrement dit, l'espace vectoriel engendré par l'ensemble dénombrable de fonctions

$$(\mathbb{K} = \mathbb{R}) \qquad \{1_{K_n}(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d},\ n, \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}\}$$
$$(\mathbb{K} = \mathbb{C}) \qquad \left\{1_{K_n}(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \overline{x_1}^{\beta_1} \dots \overline{x_d}^{\beta_d},\ n, \alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{N}\right\}$$

est dense dans $L^2(\Omega, \mathrm{d}x)$.

3.3. **Formule de Parseval.**

Théorème 3.14. *Soit H un espace de Hilbert possédant une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, on a*

a) Pour tout $x \in H$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty\,.$$

De plus, pour tout $x \in H$, il existe une unique suite $(x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e_n\,,$$

et on a $x_n = \langle e_n, x\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \in H$ et $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n e_n \in H$, le Théorème de Pythagore se généralise en

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$$

et on a l'identité de Parseval

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{x_n} y_n\,.$$

Démonstration. Soit $x \in H$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (e_n, x)$ et pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n e_n$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|x - S_N\|^2 &= \left\|x - \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 - 2\mathrm{Re}\left\langle x, \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\right\rangle \\
&= |x|^2 - \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\,.
\end{aligned}$$

On en déduit pour tout $N \in \mathbb{N}$ la majoration $\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 \leq \|x\|^2$ de telle sorte que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$. Maintenant pour $N > M$ on utilise le théorème de Pythagore fini (Proposition 1.12) pour calculer

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\|\sum_{n=M+1}^{N} x_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |x_n|^2\,.$$

Avec la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ N_ε, tel que $\|S_N - S_M\| \leq \varepsilon$ pour $N, M \geq N_\varepsilon$. Ainsi, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans

H qui est complet. Elle admet une limite qu'on note pour l'instant $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. En utilisant la continuité du produit scalaire, on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(e_m, x - S) = (e_m, x) - \left(e_m, \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n\right) = x_m - x_m = 0\,.$$

Ainsi $x - S$ est orthogonal à $H = \mathrm{Hilb}(e_m, m \in \mathbb{N})$. Il est donc nul, $x = S = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. Enfin, comme $\lim_{N\to\infty} S_N = x$, la première relation nous donne $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$ et l'identité de Parseval s'obtient facilement par passage à la limite. $\square$

Remarque 3.15. La deuxième partie du théorème nous dit qu'en fait l'application $H \ni x \to (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$ donnée par $x_n = (e_n, x)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. Ainsi il n'y a qu'un seul espace de Hilbert séparable à isomorphisme près.

Exemple 3.16. Les séries de Fourier fournissent un exemple canonique du théorème précédent. Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. On a

$$c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\,.$$

Alors, la série (de Fourier) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ converge dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ vers f. Il faut bien faire attention au sens dans lequel la convergence est vraie : il s'agit de la convergence pour la norme L^2. Rien n'est dit ici au sujet de la convergence ponctuelle de cette série.

De plus, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Lorsque f est à valeurs réelles, il est naturel de considérer le coefficients de Fourier réels donnés par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x\,,\quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\,,$$

et on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f))\,.$$

On a :

$$\frac{1}{4}|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,\mathrm{d}x\,.$$

La série de Fourier s'écrit également

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\,.$$

4. Un espace de Hilbert fondamental : $L^2(\Omega)$

Cette section va se concentrer sur l'espace de Hilbert explicite $L^2(\Omega)$.

4.1. **Un résultat de densité.**

Nous avons vu que la connaissance de résultats de densité peut être très importante pour établir l'existence de bases hilbertiennes.

Lemme 4.1. *Il existe $\rho \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ et avec ρ nulle hors de la boule $B(0,1)$.*

Dans la suite, on considérera une telle fonction ρ et on posera, pour tout $n \geq 1$,

$$\rho_n(x) = n^d \rho(nx)\,.$$

Définition 4.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On appelle support de f l'ensemble fermé suivant :

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}\,.$$

On vérifie que si $x \in \Omega$ et $x \notin \mathrm{supp} f$, alors $f(x) = 0$. On dit que que f est à support compact dans Ω quand $\mathrm{supp} f$ est compact et vérifie $\mathrm{supp} f \subset \Omega$. Dans ce cas et si f est continue, on écrit : $f \in \mathscr{C}^0_0(\Omega)$.

Lemme 4.3. *Soit $f \in \mathscr{C}^0_0(\mathbb{R}^d)$. Alors, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Proposition 4.4. *Soit $f \in \mathscr{C}^0_0(\mathbb{R}^d)$. On considère la suite de fonctions $(\rho_n \star f)$ donnée par :*

$$\rho_n \star f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Il s'agit d'une suite de fonctions, indéfiniment dérivables et à support compact telle que $\mathrm{supp}(\rho_n \star f) \subset B_f(0, \frac{1}{n}) + \mathrm{supp} f$ (et qui est lui-même contenu dans un compact $K \subset \Omega$ indépendant de n à partir d'un certain rang), qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 4.5. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Alors $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega)$. Soit $\varepsilon > 0$. Un résultat de densité classique [1] affirme qu'il existe $f_1 \in \mathscr{C}^0_0(\Omega)$ telle que

$$\|f - f_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

On peut bien sûr voir f_1 comme un élément de $\mathscr{C}^0_0(\mathbb{R}^d)$.

1. La lectrice ou le lecteur intéressé par une preuve peut regarder les exercices 20, 21 et 22 ; ils lui permettront de faire le point sur divers aspects de la théorie de l'intégration ou de topologie de $\mathbb{R}^d$. L'exercice 22 pourrait même être modifié pour établir directement le résultat de la présente proposition.

Avec les notations de la proposition précédente, on a :

$$\|\rho_n \star f_1 - f_1\|_{L^p(\Omega)} = \|\rho_n \star f_1 - f_1\|_{L^p(K)} \leq \|\rho_n \star f_1 - f_1\|_{\infty,K}|K|^{\frac{1}{p}}\,.$$

Alors, pour n assez grand, on a :

$$\|\rho_n \star f_1 - f_1\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

□

4.2. **Le cas de $L^2(\mathbb{R})$ et la transformation de Fourier.**

4.2.1. *Transformation de Fourier.*

Définition 4.6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La fonction $\hat{f}$, qui est bien définie, est appelée transformée de Fourier de f.

Proposition 4.7. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini.*

Exemple 4.8. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$.

Exemple 4.9. Considérons $\alpha > 0$. On pose $f(x) = e^{-\alpha x^2}$. On vérifie aisément que $f \in L^1(\mathbb{R})$, puis on écrit

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

On sait déjà que $\hat{f}$ est continue et bornée. En fait, par le théorème de dérivation sous le signe $\int$, elle est dérivable et

$$\hat{f}'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

On écrit

$$\hat{f}'(\xi) = \frac{i}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \left(e^{-\alpha x^2}\right)'\,\mathrm{d}x\,.$$

et on intègre par parties pour trouver que

$$\hat{f}'(\xi) = -\frac{\xi}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\xi}{2\alpha}\hat{f}(\xi)\,.$$

La résolution de cette équation différentielle permet d'écrire

$$\hat{f}(\xi) = C(\alpha) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}\,,$$

où $C(\alpha)$ est une constante à déterminer. Notons que

$$C(\alpha) = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

C'est un calcul assez classique, utilisant le théorème de Fubini et les coordonnées polaires, qui permet de voir que, quand $\alpha > 0$, on a :

$$C(\alpha)^2 = \frac{\pi}{\alpha} \, ,$$

et alors, comme dans ce cas $C(\alpha) > 0$, on a

$$C(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, .$$

En conclusion, on a montré

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, .$$

Remarque 4.10. Quand α est un nombre complexe tel que $\operatorname{Re} \alpha > 0$, la formule de l'exemple précédent est encore vraie, mais il faut être prudent. Noter que si $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, on a aussi $\operatorname{Re} \frac{\pi}{\alpha} \geq 0$.

Déjà il faut préciser le sens de la racine carrée. Pour $z \notin \mathbb{R}_-$, on écrit de façon unique

$$z = \rho e^{i\theta} \, , \quad \rho > 0 \, , \theta \in]-\pi, \pi[\, ,$$

et on définit

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2} \, .$$

Considérons la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$c(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\rho_0 e^{i\theta} x^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

On trouve $c'(\theta) = -i\rho_0 e^{i\theta} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\rho_0 e^{i\theta} x^2} \, \mathrm{d}x$. On obtient alors

$$c'(\theta) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} x \left(e^{-\rho_0 e^{i\theta} x^2} \right)' \, \mathrm{d}x = -\frac{i}{2} c(\theta) \, .$$

Il vient : $c(\theta) = A e^{-i\theta/2}$. En $\theta = 0$, on sait que

$$c(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\rho_0}} \, ,$$

si bien que

$$c(\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{\rho_0}} e^{-i\theta/2} = \sqrt{e^{-i\theta} \frac{\pi}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{\rho_0 e^{i\theta}}} \, .$$

Proposition 4.11. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$,*

$$\widehat{\tau_\alpha f}(\xi) = e^{i\alpha\xi}\widehat{f}(\xi)\,,$$

avec $\tau_\alpha f(x) = f(x+\alpha)$.

Proposition 4.12. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, si on considère $g(x) = \overline{f}(-x)$, on a $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$.*

Proposition 4.13 (Formule d'échange des chapeaux)**.** *Considérons $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration. On rappelle que $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont bornées, de sorte que les intégrales qui apparaissent sont toutes deux bien définies.

On peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iyx}g(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x\,.$$

On vérifie alors qu'on peut appliquer le théorème de Fubini et le résultat s'ensuit. □

Exemple 4.14. Considérons $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}\hat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nous avons déjà rencontré le produit de convolution dans un cas particulier. Nous pouvons en fait le définir de façon assez générale et voir qu'il se comporte étonnamment vis-à-vis de la transformée de Fourier.

Proposition 4.15. *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. De plus, en posant*

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

on a $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Proposition 4.16. *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors, on a*

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}\,.$$

Démonstration. On écrit

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,.$$

On peut vérifier que le théorème de Fubini s'applique et ainsi que

$$\widehat{f\star g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x-y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

$\square$

4.2.2. *Transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.* On considère :

$$\mathscr{S}(\mathbb{R})=\{f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2\,,\exists C_{\alpha,\beta}>0 : \forall x\in\mathbb{R} : |x^\alpha f^{(\beta)}(x)\}|\leq C_{\alpha,\beta}\}\,.$$

Il est aisé de vérifier que, pour tout $p\in[1,+\infty]$, on a $\mathscr{S}(\mathbb{R})\subset L^p(\mathbb{R})$ et ainsi que la transformée de Fourier est bien définie sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et il se trouve qu'elle préserve $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Lemme 4.17. *Pour tout $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est une fonction indéfiniment dérivable. De plus,*

$$i\widehat{f}'=\widehat{xf}\,,$$

et

$$i\xi\hat{f}=\widehat{f'}\,.$$

Proposition 4.18. *Pour tout $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $\hat{f}\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

Proposition 4.19. *Pour tout $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

ou encore

$$\hat{\hat{f}}(x)=2\pi f(-x)\,.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. On a, par convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Puis, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}\widehat{\tau_x f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4\varepsilon}}f(x+u)\,\mathrm{d}u\,,$$

si bien que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}f(x+v\sqrt{4\varepsilon})\,\mathrm{d}v\,.$$

Comme f est bornée, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à cette dernière intégrale et le résultat s'ensuit. $\square$

Remarque 4.20. La preuve précédente montre en fait que la formule est vraie pour tout $f\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathscr{C}^0_b(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.

Exemple 4.21. Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

En fait, on peut relaxer l'hypothèse que f est bornée et obtenir tout de même la formule d'inversion de Fourier.

Lemme 4.22. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. La suite $(\rho_n \star f)$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathscr{C}^0_0(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. Ensuite, on écrit

$$\rho_n \star f - f = \rho_n \star g - g + \rho_n \star (f - g) + g - f\,,$$

et on a

$$\|\rho_n \star f - f\|_1 \leq \|\rho_n \star g - g\|_1 + \|\rho_n \star (f - g)\|_1 + \|g - f\|_1\,.$$

et même

$$\|\rho_n \star f - f\|_1 \leq \|\rho_n \star g - g\|_1 + 2\|(f - g)\|_1\,,$$

puisque $\|\rho_n\|_1 = 1$. De plus, on a déjà vu que $\rho_n \star g$ converge vers g dans $L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Corollaire 4.23. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout x,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Démonstration. On a, grâce au théorème de Fubini, à la formule d'échange de chapeaux et à la formule d'inversion pour les fonctions de la classe de Schwartz,

$$f \star \rho_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{\rho}_n(\xi)\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Le membre de gauche tend vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc converge pour presque tout x vers $f(x)$, tandis que le membre de droite peut être traité par le théorème de convergence dominée puisque

$$|\hat{\rho}_n| \leq 1\,,$$

et $\hat{\rho}_n(\xi) \to 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

$\square$

Corollaire 4.24. *Pour tout $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,.$$

En particulier,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la formule d'échange de chapeaux, de la formule d'inversion et de la proposition 4.12. $\square$

4.2.3. *Extension de la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.*

Proposition 4.25. *Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, posons $\mathscr{F}(f) = \hat{f}$. L'endomorphisme $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ s'étend en un unique endomorphisme continu toujours noté $\mathscr{F}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Il vérifie $\|\mathscr{F}(f)\|^2 = 2\pi\|f\|^2$.*

De plus, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\mathscr{F} f = \hat{f}$.

Démonstration. C'est une application directe du théorème de prolongement des applications entre espaces complets qui sont uniformément continues sur une partie dense. Rappelons ce raisonnement très classique dans ce cas particulier fondamental.

On rappelle que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et qu'on a montré que

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|\mathscr{F} f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe une suite $(f_n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Pour tout m et n, on a :

$$\|f_m - f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|\mathscr{F}(f_m - f_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

si bien qu'on voit que $(\mathscr{F} f_n)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est complet. Elle converge donc vers une limite g.

On a

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g\|^2.$$

Prenons alors une autre suite $(\tilde{f}_n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers f. Il existe alors $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $(\mathscr{F}\tilde{f}_n)$ converge vers $\tilde{g}$. En observant qu'on a

$$\|\tilde{f}_n - f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|\mathscr{F}(\tilde{f}_n - f_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

on en déduit que $g = \tilde{g}$. On pose alors $\mathscr{F} f := g$ et on vient ainsi d'étendre $\mathscr{F}$ à $L^2(\mathbb{R})$. Notons que

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathscr{F} f\|^2.$$

On vérifie facilement que $\mathscr{F}$ est toujours un endomorphisme (de $L^2(\mathbb{R})$).

Pour l'unicité, supposons que $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ soient deux prolongements continus de $\mathscr{F}$. Considérons $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $(f_n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers f. On a, par continuité,

$$\mathscr{F}_1 f = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{F} f_n = \mathscr{F}_2 f.$$

$\square$

4.2.4. *Une base hilbertienne de* $L^2(\mathbb{R})$. Nous n'avons pas encore exhibé de base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, mais nous avons à disposition une famille orthonormée (pour le produit scalaire canonique) infinie, cf. Exemple 1.16. Serait-elle une base hilbertienne ?

Il est déjà clair que

$$\mathrm{Vect}\{P_n e^{-\frac{x^2}{2}}, n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{Vect}\{x^n e^{-\frac{x^2}{2}}, n \in \mathbb{N}\},$$

puisque les polynômes P_n sont de degré n. Reste à savoir si cet espace vectoriel est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous avons un critère qui permet d'établir la densité. Pour avoir la densité, il est nécessaire et suffisant que l'orthogonal soit réduit à 0 :

$$\mathrm{Vect}\{x^n e^{-\frac{x^2}{2}}, n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}.$$

Soit donc $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle f, x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \rangle = 0.$$

Cela s'écrit aussi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Considérons alors

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x,$$

qui est la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On peut aussi écrire que

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \xi^n f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x.$$

On peut vérifier que le théorème de Fubini s'applique et qu'on a donc :

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi^n \int_{\mathbb{R}} \frac{i^n x^n}{n!} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 0.$$

La formule d'inversion de Fourier implique alors que $f e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et ainsi que $f = 0$.

La famille (H_n) est donc une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 4.26. On rappelle qu'on a vu que

$$-H_n'' + x^2 H_n = (2n+1) H_n.$$

Existe-t-il d'autres nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels on peut trouver $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que

$$-f'' + x^2 f = \lambda f \quad ?$$

Considérons un tel λ et une telle fonction f. On a

$$\langle H_n, -f'' + x^2 f\rangle = \lambda \langle H_n, f\rangle \,.$$

Une double intégration par parties donne

$$\langle -H_n'' + x^2 H_n, f\rangle = \lambda \langle H_n, f\rangle \,,$$

de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n + 1 - \lambda)\langle H_n, f\rangle = 0 \,.$$

Si d'aventure $\langle H_n, f\rangle = 0$ pour tout n, le fait que H_n soit une base hilbertienne impliquerait que $f = 0$. On peut donc supposer qu'il existe n_0 tel que $\langle H_{n_0}, f\rangle \neq 0$. Ainsi, $\lambda = 2n_0 + 1$ et alors, pour tout $n \neq n_0$, $\langle H_n, f\rangle = 0$. On écrit alors

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle H_n, f\rangle H_n = \langle H_{n_0}, f\rangle H_{n_0} \,.$$

En conclusion, f est nécessairement proportionnelle à l'une des fonctions d'Hermite.

5. Vers la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints

Dans cette partie, H désigne un espace de Hilbert séparable. On considère $T \in \mathcal{L}(H)$.

5.1. **Spectre.**

Définition 5.1. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de T, noté $\sigma(T)$ si $T - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible.

Lemme 5.2. *$\sigma(T)$ est fermé dans $\mathbb{C}$.*

5.2. **Adjoint.**

Proposition 5.3. *Il existe un unique opérateur noté $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que :*

$$(Tx, y) = (x, T^* y), \quad \forall x, y \in H.$$

Définition 5.4. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $T^* = T$.

Proposition 5.5. *Si T est auto-adjoint, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $T - iy\mathrm{Id}$ est inversible dès que $y \in \mathbb{R}^*$. Pour cela, on estime (en utilisant que T est auto-adjoint) :

$$\|(T - iy\mathrm{Id})u\|^2 = \|Tu\|^2 + y^2\|u\|^2.$$

En particulier, on en tire que :

$$\|(T - iy\mathrm{Id})u\|^2 \geq y^2\|u\|^2.$$

$T - iy\mathrm{Id}$ est donc injectif. Pour montrer la surjectivité, nous allons montrer que son image est fermée et dense dans H. Soit v dans l'orthogonal de l'image de $T - iy\mathrm{Id}$. On a pour tout $u \in H$:

$$((T - iy\mathrm{Id})u, v) = 0$$

et donc :

$$(u, (T + iy\mathrm{Id})v) = 0,$$

d'où :

$$(T + iy\mathrm{Id})v = 0$$

et ainsi $v = 0$.

Pour la fermeture de l'image, il suffit de considérer une suite de Cauchy.

□

Proposition 5.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose :*

$$m = \inf_{u \in H, \|u\|=1} (Tu, u), \quad M = \sup_{u \in H, \|u\|=1} (Tu, u).$$

Alors, on a : $\sigma(T) \subset [m, M]$ et $m, M \in \sigma(T)$.

Démonstration. Quitte à changer T en $-T$, on peut se contenter de montrer que si $\lambda > M$, alors $T - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible et que $M \in \sigma(T)$. On remarque que :

$$((\lambda\mathrm{Id} - T)u, u) \geq (\lambda - M)\|u\|^2.$$

Un argument déjà utilisé montre que $\lambda\mathrm{Id} - T$ est inversible.

Introduisons alors $a(u, v) = ((M\mathrm{Id} - T)u, v)$. a est une forme sesquilinéaire positive. Elle donne donc lieu à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|((M\mathrm{Id} - T)u, v)| \leq ((M\mathrm{Id} - T)u, u)^{1/2}((M\mathrm{Id} - T)v, v)^{1/2}.$$

En prenant $v = (M\mathrm{Id} - T)u$, on trouve :

$$\|(M\mathrm{Id} - T)u\|^2 \leq C\|(M\mathrm{Id} - T)u\|((M\mathrm{Id} - T)u, u)^{1/2}$$

d'où :

$$\|(M\mathrm{Id} - T)u\| \leq C((M\mathrm{Id} - T)u, u)^{1/2}.$$

En considérant une suite minimisante (u_n) ($\|u_n\| = 1$), on trouve :

$$(M\mathrm{Id} - T)u_n \to 0.$$

Si M n'était pas dans le spectre, on aurait $(M\mathrm{Id} - T)$ inversible et continu (par le théorème des isomorphismes de Banach) et ainsi :

$$u_n \to 0.$$

□

Corollaire 5.7. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.*

6. Exercices

Exercice 1. Identités de polarisation : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\| \ \|$ la norme associée.

1. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer qu'on a pour tout $x, y \in E$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left[\|x + y\|^2 - \|-x + y\|^2 \right] .$$

2. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer qu'on a pour tout $x, y \in E$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left[\|x + y\|^2 - \|-x + y\|^2 + i \|ix + y\|^2 - i \|-ix + y\|^2 \right] .$$

3. En déduire qu'on peut toujours retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

Exercice 2. On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant l'identité de la médiane :

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2 .$$

L'objectif est de montrer que E muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire et, compte tenu de l'exercice précédent, on pose

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right] .$$

Il reste à vérifier qu'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout $x, y \in E$ on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ et $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.
2. Montrer que pour $x_1, x_2, y \in E$ on a

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle - \langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle = 0 .$$

   (On utilisera l'identité de la médiane avec les paires $(x_1 + y, x_2 + y)$ et $(x_1 - y, x_2 - y)$).
3. Montrer que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle$ et, en utilisant un argument de continuité, que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.
4. En déduire que $\langle x, y \rangle$ définit bien un produit scalaire sur E qui donne la norme $\|\cdot\|$.
5. Traiter de même le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ (c'est-à-dire une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1). On dit que $f \in H^2(\mathbb{D})$ lorsque $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$ vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2 < +\infty\,, \quad f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,.$$

Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, on pose :

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2\right)^{1/2}.$$

1. Montrer que l'application $T : f \in H^2(\mathbb{D}) \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui à f associe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une isométrie bijective. Pour la surjectivité, on remarquera qu'une suite dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est bornée.
2. Que peut-on dire de $(H^2(\mathbb{D}), \|\cdot\|)$?
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|z|^2}}\,.$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient $f, g \in L^2(\Omega)$. En considérant la fonction donnée sur $\Omega \times \Omega$ par

$$h(x,y) = (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\,,$$

retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $L^2(\Omega)$.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'elle est convexe et tend vers $+\infty$ à l'infini. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$g_x(y) = f(y) + \frac{1}{2}\|x-y\|^2\,.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, g_x admet un unique minimum, noté p_x, qui est caractérisé par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n\,, f(y) - f(p_x) - \langle x - p_x, y - p_x \rangle \geq 0\,.$$

2. En remarquant que, pour tous x et y,

$$f(p_y) - f(p_x) - \langle x - p_x, p_y - p_x \rangle \geq 0\,,$$

   et en examinant $\|x - p_x - (y - p_y)\|^2$, montrer que

$$\|p_x - p_y\|^2 + \|x - p_x - (y - p_y)\|^2 \leq \|x - y\|^2\,.$$

3. Montrer que les points fixes de $x \mapsto p_x$ sont exactement les minimas de f.
4. Si C est un convexe fermé, on définit ι_C en posant $\iota_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $\iota(x) = +\infty$ sinon. Montrer que ι_C est convexe. À quel problème se réduit le problème de minimisation de g_x quand $f = \iota_C$? Commenter.

Exercice 6. Considérons H un espace préhilbertien et deux produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. On s'intéresse au problème de minimisation suivant

$$\inf_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle u - e, u - e \rangle_2}{\langle u, u \rangle_1} ,$$

où $e \in H$ est donné. On suppose que cet infimum est un minimum, atteint en un certain $u_0 \in H$.

1. Fixons $u \in H$. On introduit la fonction

$$f(t) = \frac{\langle u_0 - e + tu, u_0 - e + tu \rangle_2}{\langle u_0 + tu, u_0 + tu \rangle_1} .$$

   Justifier que f est bien définie au voisinage de $t = 0$.
2. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall u \in H , \quad \langle u_0 - e, u \rangle_2 = \lambda \langle u_0, u \rangle_1 .$$

3. Application. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle symétrique définie positive, dans le sens où $a_{ij} = a_{ji}$ et

$$\forall X \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} , \quad \langle AX, X \rangle > 0 ,$$

   où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$. Montrer que A possède une valeur propre réelle.

Exercice 7. On se place dans $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Considérons $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ et, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(X) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j^2 .$$

1. Montrer que $C = \{X \in \mathbb{R}^n : Q(X) \leq 1\}$ est un convexe fermé.
2. Justifier que $\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n : Q(X) < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

   On fixe maintenant $X_0 \notin C$ et on note X_1 la projection de X_0 sur C.
3. Expliquer pourquoi

$$\langle X_0 - X_1, X_1 \rangle \geq 0 .$$

4. Calculer la différentielle de $Y \mapsto \|Y - X_0\|^2$ et en déduire que
$$\min_{Y \in C} \|Y - X_0\|^2 = \min_{Y \in D} \|Y - X_0\|^2 \,,$$
avec $D = \{X \in \mathbb{R}^n : Q(X) = 1\}$.
5. Montrer, à l'aide de la méthode de l'Exercice 6, qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,
$$X_0^j - X_1^j = \mu \lambda_j X_1^j \,.$$
6. Justifier que $\mu > 0$.
7. Montrer que la fonction
$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j (X_0^j)^2}{(1 + x\lambda_j)^2}$$
est bien définie pour $x \geq 0$ et que l'équation $F(x) = 1$ possède une unique solution qui est même strictement positive.
8. Décrire X_1 en fonction de X_0 et des λ_j.
9. Expliquer comment, à l'aide des questions précédentes, on peut décrire la projection sur un ellipsoïde quelconque de $\mathbb{R}^d$ donné par
$$C = \{X \in \mathbb{R}^d : Q(X) \leq 1\} \,,$$
où Q est une forme quadratique définie positive.

Exercice 8. Soient $X \subset \mathbb{R}^{p_1}$ et $Y \subset \mathbb{R}^{p_2}$ deux ouverts non vides. Soit $k \in L^2(X \times Y)$. Pour tout $f \in L^2(Y)$, on pose :
$$Tf(x) = \int_Y k(x,y) f(y) \, dy \,.$$

1. Montrer que T est bien définie de $L^2(Y)$ vers $L^2(X)$ et qu'elle est linéaire et continue.
2. Soit $g \in L^2(X)$. Montrer qu'il existe une unique fonction $h \in L^2(Y)$ telle que, pour tout $f \in L^2(Y)$,
$$\langle Tf, g \rangle_{L^2(X)} = \langle f, h \rangle_{L^2(Y)} \,,$$
et donner ensuite une expression de h faisant intervenir g et k.

Exercice 9. On pose $\Omega =]0,1[$. Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ et
$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \exists C > 0 : \forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega) \,, \left| \int_\Omega f \varphi' \mathrm{d}x \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right\} .$$

1. Grâce à la densité de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, montrer que, pour tout $f \in H^1(\Omega)$, il existe une unique fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que
$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)\,, \quad -\int_\Omega f\varphi' \mathrm{d}x = \int_\Omega g\varphi \,\mathrm{d}x\,.$$
2. Montrer que $f \mapsto g$ est linéaire.
3. Que peut-on dire quand $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$? Peut-on trouver g en fonction de f ?

   Désormais on note f' cet unique élément de $L^2(\Omega)$ associé à f.
4. Pour tout $f, g \in H^1(\Omega)$, on pose
$$\langle f, g\rangle_{H^1} = \langle f, g\rangle + \langle f', g'\rangle\,.$$
   Montrer que $(H^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 10. Soit H un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire continue a sur H, et on suppose de plus que a est *coercive*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que
$$\forall x \in H \qquad a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2\,.$$
$\mathcal{L}(H)$ désignera l'ensemble des endomorphismes continus de H.

1. Soit x dans H. Démontrer qu'il existe $Tx \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $a(x,y) = \langle Tx, y\rangle$.
2. Prouver qu'on définit ainsi un élément T de $\mathcal{L}(H)$.
3. Calculer $T(H)^\perp$.
4. Prouver que pour tout x de H, $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$. En déduire que T est injectif et que $T(H)$ est fermé.
5. Que vaut $T(H)$?
6. Déduire des questions précédentes que T est un isomorphisme continu de H dans lui-même d'inverse continu. Donner une majoration de la norme de $\|T^{-1}\|$.
7. Soit L une forme linéaire continue sur H. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique $u \in H$ tel que
$$\forall y \in H \quad a(u,y) = L(y)\,.$$

Exercice 11. Cet exercice est la continuation des Exercices 9 et 10. On considère $\Omega =]0,1[$ et on note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ pour la norme de $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des limites de suites de fonctions $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ pour la norme de $H^1(\Omega)$.

1. Expliquer pourquoi $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

2. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, on a
$$c\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$
3. On considère, pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$,
$$a(u,v) = \langle u', v' \rangle .$$
Montrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercice sur $H_0^1(\Omega)$.
4. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,
$$\int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x = \int_0^1 fv \,\mathrm{d}x .$$
5. Montrer que $u' \in H^1(\Omega)$ et que $-(u')' = f$. Commenter.

Exercice 12. On considère la fonction f, 2π-périodique, impaire, telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \in]0, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.

Donner une formule explicite pour
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} .$$

Exercice 13. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On considère la fonction 2π-périodique f_α définie par : $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f_α.
2. Montrer que, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,
$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + 2\pi^{-1}\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx) .$$
3. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$,
$$\cot u - \frac{1}{u} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2} .$$
4. Établir que, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_0^x \left(\cot u - \frac{1}{u}\right) \mathrm{d}xu = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) .$$
5. Donner une formule pour la fonction sin.

Exercice 14. On cherche une fonction $u \in \mathscr{C}^\infty([0,1]\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\partial_t u = \partial_x^2 u\,,$$

et telle que u s'étend par continuité à $[0,1]\times[0,+\infty[$. On veut aussi que les deux conditions aux limites soient satisfaites :

$$\forall t \geq 0\,, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \quad u(x,0) = f(x)\,,$$

où $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$.

1. Trouver des solutions particulières de l'équation par une méthode de séparation des variables et qui satisfassent la première condition aux limites.
2. Donner une solution de l'équation qui soit sous forme d'une série de fonctions toutes non identiquement nulles.
3. En considérant un prolongement $\mathscr{C}^1$ de f en une fonction 2-périodique, trouver une solution.
4. Que dire de l'unicité de cette solution ?

Exercice 15. Montrer que, pour tout $u \in \mathscr{C}^1([0,\pi])$, telle que $u(0) = u(\pi) = 0$,

$$\int_0^\pi |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^\pi |u'(x)|^2 \mathrm{d}x\,.$$

Déterminer les u réalisant l'égalité. Généraliser à un intervalle $[a,b]$.

Exercice 16.

On note $h^1(\mathbb{N})$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)|u_n|^2 < +\infty.$$

Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in h^1(\mathbb{N})$, on pose

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)u_n\overline{v_n}.$$

On rappelle que $\ell^2(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites de carré sommable, muni du produit hermitien

$$(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\overline{v_n}.$$

qui en fait un espace de Hilbert.

1. Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N})$; a-t-on $h^1(\mathbb{N}) = \ell^2(\mathbb{N})$?
2. Montrer que $\langle .,.\rangle$ définit un produit hermitien sur $h^1(\mathbb{N})$.

3. Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ muni de ce produit hermitien est un espace de Hilbert.
4. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note e^m la suite définie par $e^m_n = \delta_{m,n}$. Montrer que la famille $(e^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est totale dans $h^1(\mathbb{N})$. En déduire une base hilbertienne de $h^1(\mathbb{N})$.
5. Prouver que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de $(.|.)$.
6. Soit $T : h^1(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ défini par $(Tu)_n = nu_n + u_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $(Tu)_0 = 0$. Montrer que T définit une application linéaire continue de $h^1(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$, et calculer sa norme. On pourra utiliser la propriété suivante : pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ avec égalité si et seulement si $a = b$.

Exercice 17. Polynômes de Legendre : Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit la forme bilinéaire :

$$(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Vérifier que muni de ce produit scalaire $\mathbb{R}[X]$ est un espace préhilbertien.
2. En appliquant à la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, montrer qu'il existe une et une seule famille orthonormée P_n dans laquelle P_n est exactement de degré n et vérifie $(P_n, X^n) > 0$. Vérifier que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base algébrique de $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1], dx)$.
4. On définit le polynôme Q_n par
$$Q_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$
   (a) Montrer que Q_n est de degré n et a n racines simples dans $(-1, 1)$.
   (b) Montrer que Q_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n et en déduire $Q_n = \lambda_n P_n$.
   (c) Calculer (Q_n, Q_n) et en déduire λ_n.
   (d) Calculer $Q(-1)$ et $Q(1)$.
5. Établir les relations
$$\forall n \geq 2,\ nQ_n = (2n-1)XQ_{n-1} - (n-1)Q_{n-2}\,,$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \frac{d}{dt}[(1-t^2)P_n'(t)] + n(n+1)P_n(t) = 0\,.$$

Exercice 18. Fournir une base hilbertienne explicite de $L^2([-1,1]\times[-1,1])$ pour le produit scalaire canonique.

Exercice 19. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On dit qu'une suite (u_n) converge faiblement vers $\ell \in H$ lorsque, pour tout $v \in H$,

$$\lim_{n\in+\infty} \langle u_n, v\rangle = \langle \ell, v\rangle\,.$$

1. Montrer qu'il existe une suite (u_n) (à termes tous non nuls) qui converge faiblement vers 0.
2. Soit (u_n) une suite bornée. Montrer qu'elle possède une sous-suite faiblement convergente.
3. Reprendre la question précédente dans le cas non séparable.

Exercice 20. Soit Ω un borélien non vide et borné de $\mathbb{R}^d$, (ρ_n) une suite régularisante (comme dans le cours) et $p \in [1, +\infty[$.

1. Justifier que $\rho_n \star \mathbb{1}_\Omega(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et prouver qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $x \notin B(0, R)$ et tout $n \geq 1$, $\rho_n \star \mathbb{1}_\Omega(x) = 0$ et $\mathbb{1}_\Omega(x) = 0$.
2. Montrer que $\rho_n \star \mathbb{1}_\Omega \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 21.

1. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$. Montrer qu'il existe une suite (f_n) qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et qui est telle que chaque f_n est bornée et nulle hors d'une boule.
2. Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable bornée, et soit $M > 0$ tel que $0 \leq g < M$. Montrer que la suite (g_n) donnée par

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{kM}{2^n} \mathbb{1}_{\frac{k}{2^n}M \leq g < \frac{k+1}{2^n}M}(x)\,,$$

   converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}^d$.
3. Montrer que toute fonction mesurable bornée est limite uniforme de fonctions étagées.
4. En admettant que toute indicatrice de borélien borné est approchable dans L^p par une fonction $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, en déduire que $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 22. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$K_n = \left\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\right\}\,, \quad \Omega_n = \left\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\right\}\,.$$

Justifier que K_n et Ω_n sont non vides pour $n \geq N$. Montrer que K_n est fermé et Ω_n est ouvert.

2. Pour tout $n \geq N$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
$$\chi_n(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, \Omega_{2n}^c)}{\mathrm{dist}(x, K_n) + \mathrm{dist}(x, \Omega_{2n}^c)} .$$
Justifier que χ_n est bien définie, continue et qu'elle satisfait
$$0 \leq \chi_n \leq 1 ,$$
et $\chi_n(x) = 1$ pour tout $x \in K_n$ et $\chi_n(x) = 0$ pour tout $x \notin \Omega_{2n}$.
3. Soit $f \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ et $p \in [1, +\infty[$. Montrer qu'il existe une suite de fontions $f_n \in \mathscr{C}_0^0(\Omega)$ qui converge vers $f_{|\Omega}$ dans $L^p(\Omega)$.
4. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que $\mathscr{C}_0^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 23.

1. Déterminer la transformée de Fourier de $1_{[-R,R]}$ pour tout $R > 0$.
2. Déterminer la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, \mathrm{d}x ,$$
et en déduire que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x ,$$
est convergente et donner sa valeur explicite.
3. Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, étudier
$$\lim_{R \to +\infty} \langle \mathscr{F}(1_{[-R,R]}), f \rangle .$$

Exercice 24. On considère une fonction f continue telle qu'il existe $\alpha > 1$, $C > 0$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} , \quad |f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha} .$$
On suppose que
$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(2m\pi)| < +\infty .$$

1. Montrer que la fonction
$$S(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$$
est bien définie sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.
2. Établir que, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$S(t)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2m\pi)e^{2i\pi mt}\,.$$
3. Que devient cette formule pour $f(x)=e^{-\gamma x^2}$ avec $\gamma>0$?

Exercice 25. Nous souhaitons montrer que, pour tout $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :
$$\left(\int_{\mathbb{R}}|xf(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)\geq\frac{\pi}{2}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2\,.$$

1. Première méthode.
   a) Montrer que : $g'(x)-xf'(x)=f(x)$ où $g(x)=xf(x)$.
   b) En faisant le produit scalaire avec f et à l'aide d'une intégration par parties, en déduire que
   $$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\leq 2\|g\|\|f'\|\,.$$
   c) Conclure.
2. Deuxième méthode.
   a) En observant que
   $$\int_{\mathbb{R}}|f'(x)+xf(x)|^2\mathrm{d}x\geq 0\,,$$
   et en développant le carré, montrer que
   $$\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}|xf(x)|^2\mathrm{d}x\geq\|f\|^2\,.$$
   b) En déduire que
   $$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\mathrm{d}x\leq 2\|g\|\|f'\|\,.$$
   On pourra appliquer la dernière inégalité montrée à $f(x)=\varphi(\alpha x)$ avec $\alpha>0$ bien choisi et $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ fixée.

Exercice 26. Déterminer toutes les fonctions $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telles que
$$-u'' + xu = 0\,.$$

Exercice 27. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que
$$-u'' + u = f\,,$$
puis exprimer u en fonction de f à l'aide d'une formule intégrale.

Exercice 28. Trouver une solution $u(x,t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$, continue sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$, de l'équation
$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0\,,$$
avec $u(x,0) = f(x)$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ donnée.

Exercice 29. Soient $c > 0$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Trouver une solution $u(x,t) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(\cdot,t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, de l'équation
$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0\,,$$
avec $u(x,0) = f(x)$ et $\partial_t u(x,0) = g(x)$. On pourra utiliser le résultat de l'Exercice 23, question 1.

Exercice 30. Déterminer toutes les solutions $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ de
$$\Delta u = 0\,.$$

Exercice 31. On pose, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,
$$af(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f'(x) + xf(x))\,, \quad a^*f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f'(x) + xf(x))\,.$$

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que la fonction $g_0 : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ est un point fixe de la transformation de $F := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}$.
2. Montrer que $a(a^*f) - a^*(af) = f$.
3. Établir que, pour tout $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,
$$\langle af, g\rangle = \langle f, a^*g\rangle\,,$$
où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire hermitien canonique de $L^2(\mathbb{R})$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = (a^*)^n g_0$. Montrer que la famille g_n est orthogonale.
5. Montrer que $\mathrm{Hilb}(g_n\,, n \in \mathbb{N}) = L^2(\mathbb{R})$.
6. Exprimer $F(g_n)$ en fonction de g_n.
7. Trouver tous les points fixes de F sur $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 32. Soit $a \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $t > 0$, on pose
$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} a(x) e^{itx^2} \, \mathrm{d}x \,.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. On considère
$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} a(x) e^{-(\varepsilon - it)x^2} \, \mathrm{d}x \,.$$
Justifier que
$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(t) = I(t) \,.$$
2. Montrer que
$$I_\varepsilon(t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi(\varepsilon - it)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4(\varepsilon - it)}\xi^2} \hat{a}(\xi) \mathrm{d}\xi \,.$$
3. En déduire que
$$I(t) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{4t}\xi^2} \hat{a}(\xi) \mathrm{d}\xi \,.$$
4. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} I(t)$ en fonction de $a(0)$.
5. Donner un développement asymptotique à tout ordre de $\sqrt{t} I(t)$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 33. Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on pose
$$Tf(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} f(y) \, \mathrm{d}y \,, \quad z = x + i\xi \,.$$

1. Justifier que T est bien définie.
2. Montrer que Tf est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et montrer que
$$(\partial_x + i\partial_\xi) Tf(x, \xi) = 0 \,.$$
3. Justifier que
$$zTf(x, \xi) = Tg(x, \xi) \,, \qquad \text{avec } g(x) = xf(x) - f'(x) \,.$$
4. Montrer que $(x, \xi) \mapsto e^{-\frac{\xi^2}{2}} Tf(x, \xi)$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$.
5. Établir que
$$\| e^{-\frac{\xi^2}{2}} Tf \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \pi^{\frac{1}{4}} \| f \|_{L^2(\mathbb{R})} \,.$$
6. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} Tf(x, \xi) \, \mathrm{d}\xi \,.$$

7. On cherche des nombres λ et des fonctions non nulles $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tels que
$$-f'' + x^2 f = \lambda f\,.$$
   (a) Montrer que si f est une telle solution, on doit avoir
$$(2z\partial_z + 1 + z^2 - \lambda)Tf = 0\,, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_\xi)\,.$$
   (b) À l'aide de la famille de fonctions $g_n(x,\xi) = z^n e^{-\frac{z^2}{4}}$, en déduire une famille de solutions au problème posé.
   (c) Quelle relation y a-t-il avec les fonctions d'Hermite ?

Exercice 34. On reprend les notations de l'exercice 9. On note On rappelle que, pour tout $f \in H^1(\mathbb{R})$, on a montré qu'il existe un unique $f' \in L^2(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})\,, \quad -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f'\varphi \,\mathrm{d}x\,.$$

Montrer que $f \in H^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ et donner une formule pour $\mathscr{F}(f')$.