Mohammed El Amrani
Jean-Philippe Monnier
Nicolas Raymond

INITIATION À L'ANALYSE

Mohammed El Amrani

Jean-Philippe Monnier

Nicolas Raymond

INITIATION À L'ANALYSE

Mohammed El Amrani, Jean-Philippe Monnier, Nicolas Raymond

TABLE DES MATIÈRES

PROLÉGOMÈNES

Mode d'emploi de ce livre

i) Pour des raisons de concision et de pédagogie, nous ne démontrerons pas toutes les assertions ou nous définirons pas toujours parfaitement rigoureusement certaines notions. Le lectorat est donc supposé avoir une intuition ou une familiarité raisonnable avec des idées mathématiques rencontrées dans son passé. L'ordre dans lequel les différents chapitres apparaissent dans ce livre ne correspond pas non plus parfaitement au déroulement réel d'un cours où des raccourcis sont parfois empruntés.

ii) Ce livre a été conçu pour qu'on puisse aisément s'en servir pour faire cours dans les deux premières années à l'université. Naturellement, il faut parfois faire des sélections dans certains chapitres quand il ne s'agit que d'introduire des notions en première année (comme la notion de limite). En seconde année, on peut alors reprendre le chapitre et explorer des aspects, parfois théoriques, plus délicats (comme la manipulation de la définition rigoureuse de la limite).

iii) Des exercices sont proposés à la fin de chaque chapitre. Ils peuvent permettre d'approfondir la compréhension du cours et de s'entraîner en complément des travaux dirigés.

Quelques conseils

Ce livre ne dispense pas d'assister aux séances où il prend vie. Il peut permettre aux étudiantes et étudiants de limiter un peu une prise de notes qui se réduit parfois à un travail de copiste...

i) Relire son cours régulièrement, de préférence avant la séance suivante.

ii) Les séances de travaux dirigés donnent corps aux définitions et concepts introduits en cours. Pour qu'elles soient profitables, le cours doit donc être appris régulièrement. Aller à un cours ou un TD, ça se prépare !

iii) Comment apprendre son cours ? Des instruments indispensables pour le faire sont un papier et un crayon (stylos et plumes d'oie acceptés). Les démonstrations doivent être refaites, en se posant des questions. Même si les dessins ne remplacent pas les démonstrations, ils peuvent les illustrer ou les guider.

iv) Pour réussir ses examens, le travail doit être régulier. Il est vain de venir à un examen en ayant révisé seulement les jours précédents et espérer réussir. Vous pouvez néanmoins y venir pour regarder langoureusement la pendule et admirer le graphisme du sujet imprimé.

v) Ne vous découragez pas !

Remerciements

Ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignement en Licence aux universités de Rennes 1 et d'Angers. Il ne serait pas ce qu'il est sans le concours de Karim Bekka, Éric Delabaere, Taoufik Hmidi, Marie-Pierre Lebaud, Ludovic Marquis et Laurent Meersseman.

PRÉLIMINAIRES

0.1. Introduction

Qu'est-ce que l'analyse ?

L'analyse est la branche des mathématiques qui étudie les limites et les inégalités. Historiquement, la notion de limite est apparue chez Zénon d'Élée au travers de ses célèbres paradoxes. Examinons l'un d'entre eux. Considérez un segment $[AB]$ et placez vous en A. Si vous souhaitez aller de A vers B, il faudra que vous passiez par le milieu C du segment. Puis de C, il vous restera $[CB]$ à parcourir. À nouveau, il vous faudra passer par le milieu de $[CB]$ si vous voulez atteindre C ; et ainsi de suite, à l'infini ! Jamais vous n'atteindrez C ! De nombreuses philosophies ont questionné directement ou indirectement ce paradoxe, de l'atomisme des épicuriens à la théorie bergsonienne du mouvement en passant par la physique aristotélicienne. Mais, comment les mathématiques y ont-elles répondu ? C'est ce que ce cours tentera d'expliquer par une présentation rigoureuse de la plupart des notions élémentaires faisant intervenir des limites. Nous verrons ainsi que plusieurs objets des mathématiques sont définis par le biais de limites, comme par exemple : les nombres réels, la racine carrée, la fonction exponentielle, le logarithme, les dérivées, les équations différentielles et beaucoup d'autres objets qui apparaissent dans les sciences chimiques, physiques et biologiques pour décrire les mouvements des atomes, des corps et des êtres vivants.

0.2. Rudiments logiques

Dans ce cours, nous ferons usage des notions d'ensembles et d'opérations ensemblistes. Nous considérerons comme familières les notions d'ensembles et d'appartenance (notée $\in$).

Définition 0.1. —

i. Si A et B sont deux ensembles, on dira que $A \subset B$ quand $x \in A$ implique que $x \in B$. On dit dans ce cas que A est une partie de B.

ii. Si E est un ensemble et si A et B sont deux parties de E, leur réunion est

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\} .$$

iii. Si E est un ensemble et si A et B sont deux parties de E, leur intersection est

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\} .$$

Définition 0.2. — On dit qu'une proposition $\mathscr{P}$ implique une proposition $\mathscr{Q}$ lorsque, quand $\mathscr{P}$ est vraie, $\mathscr{Q}$ l'est également. On écrit alors $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

Définition 0.3. — On dit que deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes lorsqu'elles ont la même valeur de vérité. On écrit alors $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$. Cela revient à dire que $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$.

Afin de démontrer la vérité d'une affirmation, on est parfois amené à effectuer un raisonnement par l'absurde. Cela consiste à supposer que l'affirmation est fausse et à rechercher une contradiction avec une vérité connue.

Définition 0.4. — i. Le symbole $\forall$ signifie « pour tout ». C'est le quantificateur universel. Si E est un ensemble, l'assertion $\forall x \in E\,, \mathscr{P}(x)$ se lit « Pour tout x appartenant à E, la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie ».

ii. Le symbole $\exists$ signifie « il existe ». C'est le quantificateur existentiel. Si E est un ensemble, l'assertion $\exists x \in E\,, \mathscr{P}(x)$ se lit « Il existe x appartenant à E telle que la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie ».

Le lecteur désirant plus de détails peut se référer à un cours de Logique ou de Théorie des Ensembles.

0.3. Les réels et les intervalles

Donnons d'ores et déjà des exemples que nous rencontrerons tout au long de ce cours.

0.3.1. Les nombres réels. — Les nombres réels, avec lesquels le lecteur est supposé familier, sont le fruit d'une longue construction historique et d'une conquête conceptuelle. Bornons nous à rappeler quelques rudiments et propriétés de ces nombres.

i. Les entiers naturels sont les nombres $0, 1, 2, 3, \cdots$ et leur ensemble est noté $\mathbb{N}$. On peut additionner deux entiers m et n et leur somme est notée $m+n$. L'addition est

   a. associative,

   b. commutative,

   c. et possède un élément neutre 0, c'est à dire : $n + 0 = 0 + n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Tout entier non nul n possède un prédécesseur, au sens où il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = k+1$. Nous pouvons aussi définir une multiplication entre entiers notée $\times$ qui est

   a. associative,

   b. distributive sur l'addition,

   c. commutative,

   d. et qui possède un élément neutre 1, c'est à dire : $n \times 1 = 1 \times n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. Les entiers relatifs sont les nombres $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ et leur ensemble est noté $\mathbb{Z}$. L'addition de $\mathbb{N}$ peut être étendue en une addition sur $\mathbb{Z}$ et elle satisfait la propriété fondamentale que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $k+\ell = 0$. Cet unique ℓ n'est autre que $-k$. Grâce à $\mathbb{Z}$, nous savons désormais résoudre l'équation $x+1 = 0$. On peut aussi étendre la multiplication aux entiers relatifs.

iii. Les nombres rationnels sont formés des quotients de nombres relatifs (par exemple $-\frac{1}{2}$, 0, 14). Leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$. Étant donné $a \in \mathbb{Z}$ (non nul), nous pouvons maintenant résoudre par exemple $ax = 1$. Son unique solution est $x = \frac{1}{a} = a^{-1}$. $\mathbb{Q}$ possède une autre propriété que $\mathbb{Z}$ ne satisfait pas : entre deux rationnels distincts, il y a toujours un autre rationnel ! Mais il semble que certaines quantités géométriques ne se traduisent pas en termes rationnels (la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, le périmètre d'un disque de rayon 1)...

iv. Arrivent enfin les nombres réels qui complètent $\mathbb{Q}$ et permettent notamment de résoudre $x^2 = 2$ (dont l'unique solution positive est $\sqrt{2}$ et n'appartient pas à $\mathbb{Q}$) ou de mesurer le périmètre d'un cercle de rayon 1 (2π). $\mathbb{R}$ est muni d'une addition et d'une multiplication avec lesquelles le lecteur est familier.

0.3.2. Borne supérieure. — $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ que le lecteur a déjà rencontrée plusieurs fois dans son existence mathématique.

Exemple 0.5. — Soit a un réel positif. Montrer que si a est tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leqslant \varepsilon$, alors $a = 0$.

Une conséquence de la construction des nombres réels est le lemme suivant.

Lemme 0.6. — *$\mathbb{R}$ est archimédien, au sens où, pour tout $x, y > 0$, avec $x < y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.*

Lemme 0.7. — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier est la partie entière de x, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.*

Définition 0.8. — Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

i. On dit que A est majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $x \leqslant M$. Le nombre M s'appelle un majorant de A.

ii. On dit que A est minorée lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $x \geqslant M$. Le nombre m s'appelle un minorant de A.

iii. On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Notons que si M est un majorant de A alors tout nombre $M' \geqslant M$ est aussi un majorant. Le théorème suivant montre l'existence d'un plus petit majorant dans $\mathbb{R}$, qui est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, que ne vérifie pas $\mathbb{Q}$. La même chose s'applique de manière analogue pour les minorants.

Définition 0.9. — Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

i. La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S, et concrètement c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.

ii. La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I, et concrètement c'est l'unique minorant S tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.

Dans la suite nous allons énoncer un théorème (qu'on va admettre) concernant l'existence et la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure.

Théorème 0.10. — *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

i. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure et c'est l'unique nombre réel S vérifiant,*

   i. *S est un majorant de A,*

ii. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \geqslant S - \varepsilon$.*

De plus, si M est un majorant de A, alors $S \leqslant M$.

ii. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure et c'est l'unique nombre réel I vérifiant,*

i. *I est un minorant de A,*

ii. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \leqslant I + \varepsilon$.*

De plus, si m est un minorant de A, alors $m \leqslant I$.

Ce théorème est très utile pour montrer l'existence de réels vérifiant certaines propriétés.

Exemple 0.11. — Considérons

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,, x^2 \leqslant 2\} \subset \mathbb{R}\,.$$

Montrer que A est non vide et majorée. Notant S sa borne supérieure, montrer que $S^2 = 2$. Que vient-on de montrer ? Combien l'équation $x^2 = 2$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

0.3.3. Intervalles de $\mathbb{R}$. —

Définition 0.12. — On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

i. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé borné appelé aussi segment),
ii. $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ (semi-ouvert à gauche ou semi-fermé à droite),
iii. $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$,
iv. $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalle ouvert),
v. $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$ (demi-droite fermée à gauche),
vi. $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ (demi-droite ouverte à gauche),
vii. $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$ (demi-droite fermée à droite),
viii. $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (demi-droite ouverte à droite),
ix. $\varnothing$ (ensemble vide),
x. $\mathbb{R}$ (droite réelle),

avec a et b des réels tels que $a \leqslant b$.

Exemple 0.13. — Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0, 1] \cup [1, 5]\,, \{\pi\}\,, [-3, -1] \cup]1, +\infty[\,, [-3, -1] \cap]1, +\infty[\quad ?$$

Justifier.

Proposition 0.14 **(Caractérisation des intervalles)**
Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $x, y \in A$ avec $x \leqslant y$, on a $[x, y] \subset A$.

Démonstration. — Traitons le cas où A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires. La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la classification des intervalles. Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure. On a, par définition, $A \subset [\delta, \gamma]$. Vérifions que $]\delta, \gamma[\subset A$. Soit $x \in]\delta, \gamma[$. Par définition des bornes inférieures et supérieures, on en déduit l'existence de $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $\delta < x_1 < x < x_2 < \gamma$. On a $[x_1, x_2] \subset A$ et donc $x \in A$. On en conclut que $]\delta, \gamma[\subset A \subset [\delta, \gamma]$. □

Définition 0.15. — On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert rencontre A.

Proposition 0.16. — *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.*

Proposition 0.17. — *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — Montrons que tout segment ouvert $]a,b[$ contient un rationnel. Si $b-a \geqslant 2$, $]a,b[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$. Sinon, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(b-a) \geqslant 2$ et alors $]na,nb[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$. Par suite, $]a,b[$ contient un rationnel. □

Proposition 0.18. — *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — Considérons le segment ouvert $]a,b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, on peut vérifier qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{b-q}{2}\,,$$

si bien que

$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b\,.$$

On vérifie aisément que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel puisque $\sqrt{2}$ est lui-même irrationnel. □

0.3.4. Valeur absolue. —

Définition 0.19. — Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$|x| = \max(x,-x)\,, \quad x_+ = \max(x,0)\,, \quad x_- = \max(-x,0)\,.$$

Proposition 0.20. — *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :*

$$|x| = x_+ + x_-\,, \quad x = x_+ - x_-\,.$$

0.4. Exercices

Préliminaires

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils rationnels : $\frac{1}{2}$, -1, 3, $\sqrt{2} - \frac{13}{9}$? On admettra que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2

A-t-on, pour tous entiers strictement positifs a, b, c et d,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad ?$$

Exercice 3

Écrire les nombres rationnels suivants sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{9}{4} - \frac{13}{3} + \frac{11}{6}\,, \quad \frac{2}{1 - \frac{30}{29+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8}\,.$$

Exercice 4

Soient a et b deux réels avec b non nul. Le nombre $\frac{a}{b}$ est-il nécessairement rationnel ?

Exercice 5

Illustrer graphiquement l'égalité suivante :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,, \quad (x+y)(z+t) = xz + xt + yz + yt\,.$$

Exercice 6

Lequel des deux réels $\dfrac{10^{20}}{1+10^{20}}$ et $1+10^{-20}$ est le plus proche de 1 ?

Exercice 7

Soit $\alpha \in]0,1]$ et $I_\alpha =]-5-\alpha, -5+\alpha[$. Déterminer α pour que, si $x \in I_\alpha$, alors $\left|\dfrac{x+5}{x+3}\right| < 10^{-2}$.

Inégalités. —

Exercice 8

Représenter graphiquement les ensembles suivants :

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-\sqrt{2}| \leqslant 1\}\,, \quad \{x \in \mathbb{R} : |x+3| > 5\}\,.$$

Exercice 9

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x-3| + |x+4| \leqslant 7\,.$$

2- Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$:

$$0 \leqslant \frac{x}{x^2-1} \leqslant 1\,.$$

Exercice 10

1- Montrer que, pour tous les réels x et y, on a

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2\,.$$

2- Déterminer l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$2|xy| = x^2 + y^2\,.$$

Exercice 11

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $|x-1| \leqslant 2$ et que $-5 \leqslant y \leqslant -4$. Fournir un majorant et un minorant pour chacun des nombres suivants

$$x+y, \quad x-y\,, \quad xy\,, \quad \frac{x}{y}\,, \quad |x|-|y|\,.$$

Exercice 12

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x,y) = |x|+|y|$, $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $N_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|)$. Montrer que pour tous les réels x et y, on a :

$$N_\infty(x,y) \leqslant N_2(x,y) \leqslant N_1(x,y) \leqslant 2N_\infty(x,y)\,.$$

Exercice 13

A-t-on, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)_- = a_- + b_-$?

Exercice 14

Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\sqrt{a_+} - \sqrt{b_+}| \leqslant \sqrt{|a-b|}\,.$$

Intervalles

Exercice 15

Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0,3[\cap[3,1[\,,\quad [0,3[\cup]3,1[\,,\quad \mathbb{Z}\,,\quad \mathbb{Q}\,,\quad \{x \in \mathbb{R} : x^4 \geqslant 1\} \quad ?$$

Exercice 16

Existe-t-il un intervalle qui ne contient aucun nombre rationnel ?

Exercice 17

1- L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ? Et la réunion ? Et la réunion de deux intervalles qui s'intersectent ?

2- Trouver deux intervalles dont l'intersection est vide et dont la réunion est un intervalle.

Exercice 18

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2-1)_+ \leqslant 1\}\,,\quad B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2-1)_+ > 2\}\,.$$

1- Représenter graphiquement A et B.

2- Peut-on écrire A et B comme des unions finies d'intervalles disjoints ?

3- Que vaut $A \cup B$? Et $A \cap B$?

Majorants, minorants, bornes supérieures et inféreures. — Exercice 19

Soit

$$E = \left\{ \frac{201}{17}\,,\quad -23\,,\quad \frac{145}{12}\,,\quad 9\sqrt{3} + \frac{111}{12}\,,\quad 20\,,\quad -\frac{231}{11} \right\}.$$

Donner le maximum et le minimum de E. Si on est amené à utiliser une approximation, on la démontrera.

Exercice 20

Existe-il un entier naturel majorant tous les réels ? Existe-t-il un réel majorant tous les entiers naturels ?

Exercice 21

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $M \in X$ tel que :

$$\forall x \in X\,,\quad x \leqslant M\,.$$

Montrer qu'un tel M est unique. On l'appelle le maximum de X.

Exercice 22

1- Montrer que, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on a $x + y + 3 \neq 0$.

2- On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A = \left\{ \frac{x - y}{x + y + 3} \ : \ x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1] \right\} .$$

Trouver un majorant et minorant de A.

Exercice 23

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose :

$$A + B = \{a + b \,, a \in A \,, b \in B\} .$$

On suppose que A et B sont majorées.

1- Montrer que $A + B$ est majorée.

2- Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 24

Soit r un réel strictement positif. On introduit $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant r\}$. Montrer que A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Notant S sa borne supérieure, montrer que $S^2 = r$.

Exercice 25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une partie finie de $\mathbb{R}$ à n éléments qu'on écrit :

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\} .$$

1- On pose

$$M_1 = \max(x_1, x_2)$$

et, pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, on définit

$$M_k = \max(M_{k-1}, x_k) .$$

Montrer que $M_n \in X$ et que M_n est un (le) maximum de X.

2- Montrer que X admet une borne supérieure, notée S.

3- Montrer que le maximum de X est égal à S.

4- Montrer que X possède un minimum et que ce minimum est la borne inférieure de X.

CHAPITRE 1

FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE

Nous allons désormais parler des fonctions (ou des applications) de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On ne saurait trop insister sur le fait qu'une application est la donnée d'un ensemble de départ (le domaine de définition) et d'un ensemble d'arrivée !

1.1. Applications

Définition 1.1 **(Application).** — Une application f est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $x \in A$ associe un unique $f(x) \in B$. On note $f : A \to B$ et on écrit aussi $x \ni A \mapsto f(x) \in B$.

Lorsqu'on parle seulement de fonction f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, il peut exister $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ n'est pas défini. Nous confondrons parfois application et fonction lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

On considère, juqu'à la fin de cette section, les applications suivantes

i. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$,

ii. $f_2 :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$,

iii. $f_3 :]-\infty, 0[\to [0, +\infty[$, $f_3(x) = x^2$.

Exemple 1.2. — A-t-on $f_1 = f_2$?

Définition 1.3 **(Graphe d'une application).** — Soit $f : A \to B$ une application. On appelle graphe de f l'ensemble suivant

$$\mathrm{Graphe}(f) = \{(x, f(x)), x \in A\} \subset A \times B\,.$$

Exemple 1.4. — On considère une fonction f dont la courbe réprésentative $\mathscr{C}$ est représentée sur la Fig. 1. On peut en déduire (approximativement) que :

1. f est définie sur $D_f = [-3.5, 5.5]$,
2. l'image de f est $[-3.5, 3]$,
3. 3 admet un unique antécédent par f, (approximativement) égal à -3.5,
4. -1.5 admet 3 antécédents par f, (approximativement) égaux à -2, 0 et 5.

Exemple 1.5. — Dessiner les graphes de f_1, f_2 et f_3.

Définition 1.6 **(Image, antécédent).** — Soit $f : A \to B$ une application. Soient $x \in A$ et $y \in B$ tels que $y = f(x)$. On dit que y est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f. Si $A' \subset A$, on note $f(A')$ l'ensemble des images des éléments de A'.

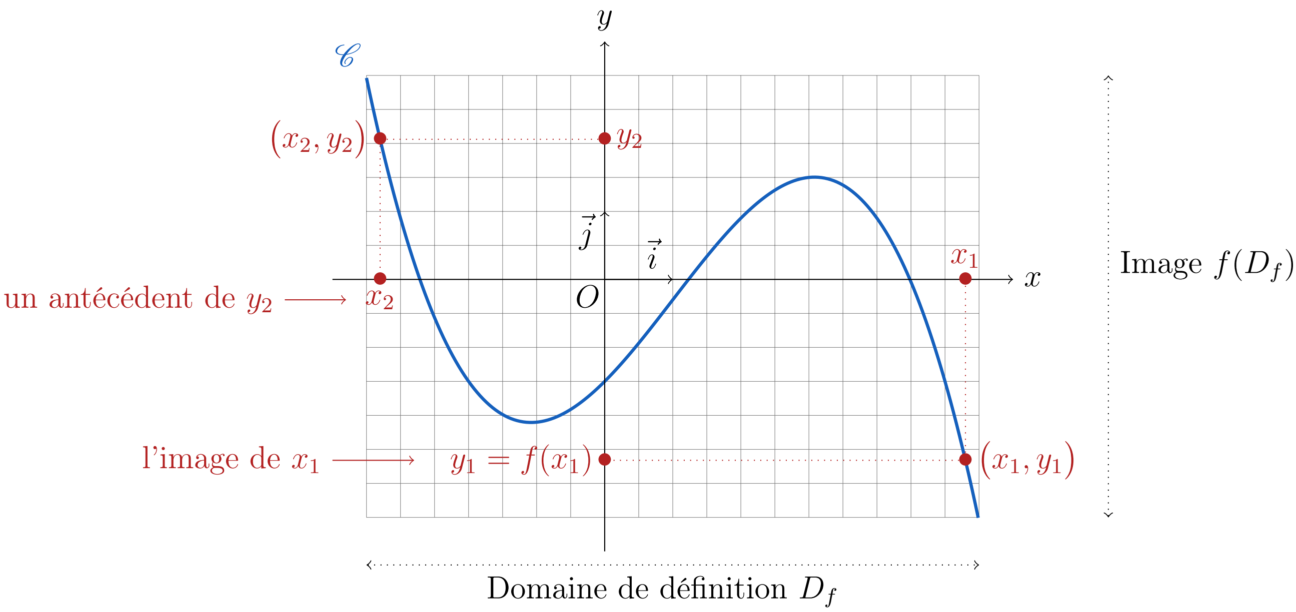


FIGURE 1. Courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f.

Exemple 1.7. — Trouver l'image de 4 par f_1. Quels sont tous les antécédents de 4 par f_1 ? Que vaut $f_1([-1,5[)$?

***Définition 1.8* (Injectivité).** — Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est injective lorsque tout élément de B possède au plus un antécédent par f. Autrement dit, f est injective si et seulement si

$$\text{si} \quad f(x) = f(y) \quad \text{alors} \quad x = y.$$

Exemple 1.9. — f_1 est-elle injective ? Et f_2 ?

***Définition 1.10* (Surjectivité).** — Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est surjective lorsque tout élément de B possède au moins un antécédent.

Exemple 1.11. — f_1 est-elle surjective ?

***Définition 1.12* (Bijectivité).** — Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est bijective quand elle est à la fois injective et surjective.

Exemple 1.13. — Parmi f_1, f_2 et f_3, y a-t-il une application bijective ? Lesquelles ? Justifier.

1.2. Exemples classiques de fonctions

1.2.1. Les fonctions du second degré. — Nous allons maintenant parler des fonctions du second degré et de leurs zéros.

Proposition 1.14. — *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c\,.$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ possède des solutions si et seulement si $\Delta \geqslant 0$. Plus précisément :

- si $\Delta > 0$, il y a deux solutions distinctes x_1 et x_2 données par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\,.$$

- si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une seule solution :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}\,.$$

Lorsque $\Delta \geqslant 0$, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\,,$$

et on a les relations :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}\,.$$

Enfin, si $\Delta < 0$, soit f ne prend que des valeurs positives, soit elle ne prend que des valeurs négatives.

Démonstration. — On écrit simplement que :

$$ax^2 + bx + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right\}\,,$$

et les conséquences s'en déduisent aisément. □

Les fonctions polynomiales sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui se présentent sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\,,$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels donnés. Pour f non identiquement nulle on a $a_n \neq 0$ et on l'appelle le coefficient dominant.

1.2.2. Logarithme et exponentielle. — La fonction logarithme népérien ln : $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction qui vérifie $\ln(1) = 0$ et la remarquable propriété :

$$\forall x, y > 0 \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,.$$

Elle peut être définie au moyen de l'intégrale :

$$\forall x > 0\,, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\mathrm{d}u\,.$$

La fonction exponentielle exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui est la fonction réciproque de ln dans le sens où : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Noter que $e = \exp(1)$ est le nombre d'Euler.

Pour $a > 0$, on définit la fonction sur $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x := \exp(x \ln(a)) \in]0, +\infty[$. Cela justifie la notation $\exp(x) = e^x$. On observe aussi que, quand x est un entier, $\exp(x \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^x = a \times a \times \ldots \times a$.

1.2.3. Fonctions trigonométriques. — Les fonctions trigonométriques cos, sin sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$ et 2π-périodiques (voir la section correspondante pour une définition précise). Nous admettrons pour le moment la plupart de leurs propriétés.

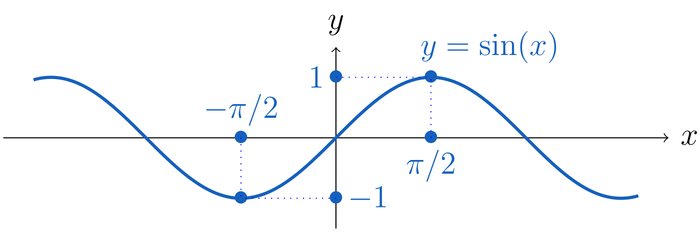


FIGURE 2. Courbe représentative de la fonction sin sur $[-5, 5]$.

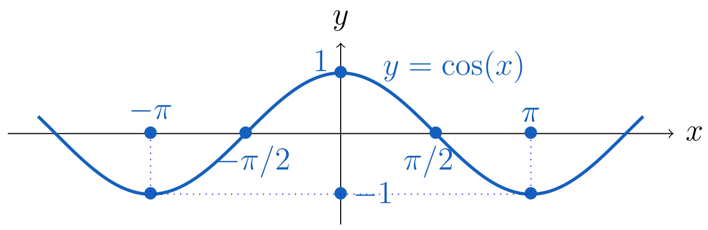


FIGURE 3. Courbe représentative de la fonction cos sur $[-5, 5]$.

Rappelons quelques valeurs remarquables des fonctions sin et cos.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	$\sin(0) = 0$	$\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$	$\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin(\pi/2) = 1$
$\cos(x)$	$\cos(0) = 1$	$\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$	$\cos(\pi/2) = 0$

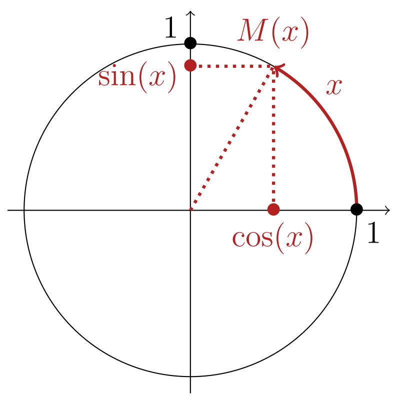


FIGURE 4. Dans le plan rapporté au repère orthonormé d'origine 0, le point $M(x)$ sur le cercle centré en 0, de rayon 1, est déterminé par l'angle x exprimé en radians. Ses coordonnées sont $\big(\cos(x), \sin(x)\big)$.

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\} \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

À l'aide du théorème de Pythagore, on peut montrer les formules suivantes.

Proposition 1.15. — *Les fonctions cosinus et sinus jouissent des propriétés algébriques suivantes :*

i. *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,

ii. *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$,

iii. *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

1.3. Opérations sur les applications

1.3.1. Somme et produit d'applications. — Les fonctions qu'on considère sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est muni d'une addition et d'une multiplication. Nous allons pouvoir donner un sens à ces opérations pour les fonctions (dès qu'elles sont définies sur le même ensemble et à valeurs dans le même ensemble).

Définition 1.16. — Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

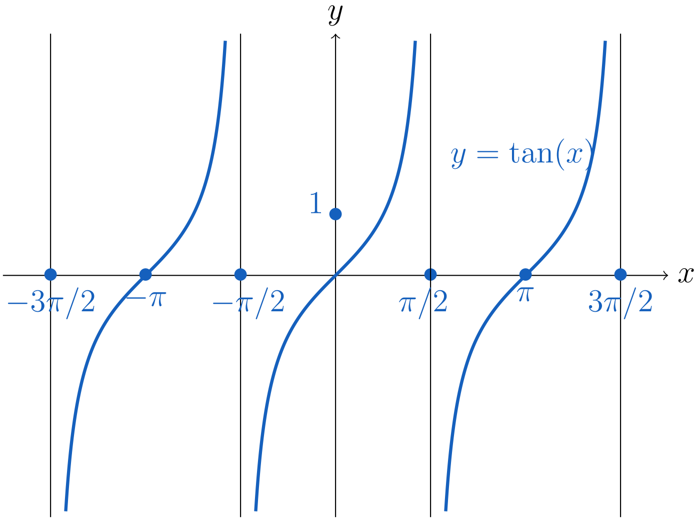


FIGURE 5. Courbe représentative de la fonction tan.

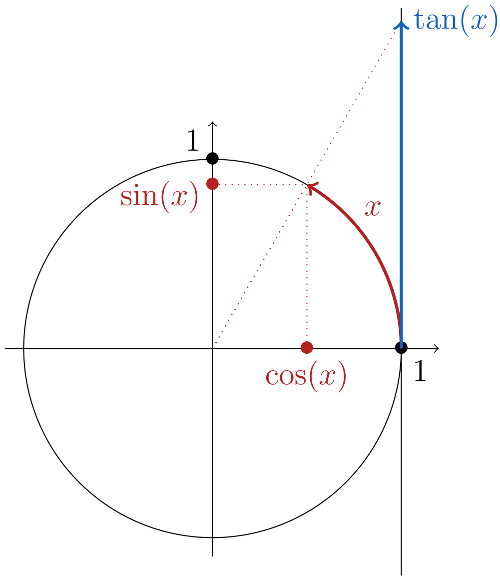


FIGURE 6. La tangente de l'angle x en radians.

i. la somme de f et g comme l'application $s = f + g : A \to \mathbb{R}$ définie par : pour tout $x \in A$, $s(x) = f(x) + g(x)$,

ii. la produit de f et g comme l'appplication $p = fg : A \to \mathbb{R}$ définie par : pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)g(x)$,

iii. le produit de f par λ comme l'application $w = \lambda f : A \to \mathbb{R}$ définie par : pour tout $x \in A$, $w(x) = \lambda f(x)$.

Exemple 1.17. — Donner une partie de $\mathbb{R}$, la plus grande possible, sur laquelle la somme des applications suivantes est bien définie : $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(x+1)$.

1.3.2. Composition d'applications. —

Définition 1.18. — Soient $A, B, \tilde{B}, C \subset \mathbb{R}$ avec $B \subset \tilde{B}$, $f : A \to B$, $g : \tilde{B} \to C$. On définit l'application $g \circ f : A \to C$ par :

$$\forall x \in A\,, \quad g \circ f(x) = g(f(x))\,.$$

$$\begin{tikzcd} x \in A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, swap, "z = g \circ f(x)"] & y = f(x) \in B \arrow[r, "g"] & z = g(y) \end{tikzcd}$$

Exemple 1.19. — Soient $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x} \in [0, +\infty[$ et $g : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(x+1) \in \mathbb{R}$. L'application $g \circ f$ est-elle bien définie ? Et $f \circ g$? En réduisant le domaine de définition de g et son ensemble d'arrivée, montrer que la composée de f avec cette nouvelle application est bien définie.

Exemple 1.20. — 1. Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \sin(x)$, applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors

(a) $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = \sin(2x+1)$

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} y = 2x + 1 \in \mathbb{R} \xrightarrow{g} \sin(y) = \sin(2x+1)$$

(b) $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = 2\sin(x) + 1$

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{g} y = \sin(x) \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} 2y + 1 = 2\sin(x) + 1\,.$$

2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x+1$. On fixe $D_f = [0, +\infty[$. On veut fixer le domaine maximal de définition D_g de g afin que $g \circ f$ et $f \circ g$ aient du sens.

(a) $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{x} + 1$ est bien définie sur $D_f = [0, +\infty[$ si $D_g = \mathbb{R}$:

$$x \in [0, +\infty[\xrightarrow{f} y = \sqrt{x} \in \mathbb{R} \xrightarrow{g} y + 1 = \sqrt{x} + 1\,.$$

(b) La fonction $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{x+1}$ n'est définie sur D_g que si $g(x) \in D_f$, c'est à dire que si $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$. Ceci nous amène à fixer $D_g = [-1, +\infty[$.

$$x \in D_g = [-1, +\infty[\xrightarrow{g} y = x + 1 \in D_f = [0, +\infty[\xrightarrow{f} \sqrt{y} = \sqrt{x+1}\,.$$

3. Soit la fonction $h(x) = \cos^2(x+1)$, définie sur $\mathbb{R}$. On peut l'écrire sous la forme $h = g \circ f$ avec $f(x) = x + 1$, $g(y) = \cos^2(y)$:

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} y = x + 1 \in \mathbb{R} \xrightarrow{g} \cos^2(y) = \cos^2(x+1)\,,$$

ou encore avec $f(x) = \cos(x+1)$, $g(y) = y^2$:

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} y = \cos(x+1) \in \mathbb{R} \xrightarrow{g} y^2 = \cos^2(x+1)\,.$$

1.4. Propriétés remarquables des fonctions à valeurs réelles

1.4.1. Fonctions majorées, minorées et bornées. —

Définition 1.21. — Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

i. On dit que f est majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $f(x) \leqslant M$. M est alors appelé majorant de f.

ii. On dit que f est minorée lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $f(x) \geqslant m$. m est alors appelé minorant de f.

iii. On dit que f est bornée lorsque elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 1.22. — 1. La fonction $f : x \in]-\infty, 3[\mapsto f(x) = 2x + 1 \in \mathbb{R}$ est une fonction majorée et 7 est un majorant de f car $x \in]-\infty, 3[\Rightarrow x < 3 \Rightarrow 2x + 1 < 7$. Donc pour tout $x \in]-\infty, 3[$, $f(x) < 7$.

2. La fonction sin est bornée sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

3. La fonction $f : x \in [0, +\infty[\mapsto f(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \in \mathbb{R}$ est une fonction bornée. En effet, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $e^x \geqslant e^0$ car la fonction exponentielle est (strictement) croissante. Or $e^0 = 1$ et $e^x \geqslant 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{e^x} \leqslant 1$. Par suite f est bornée, minorée par 0, majorée par 1.

1.4.2. Fonctions monotones. —

Définition 1.23. — Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

i. On dit que f est croissante lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$, si $x \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$.
ii. On dit que f est décroissante lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$, si $x \leqslant y$ alors $f(y) \leqslant f(x)$.
iii. On dit que f est monotone lorsque f est croissante ou décroissante.

De même, on définit les fonctions strictement croissantes et strictement décroissantes en remplaçant partout $\leqslant$ par $<$ et on parle de même de fonctions strictement monotones.

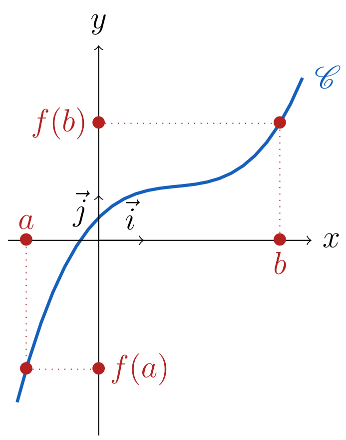


FIGURE 7. Courbe représentative d'une fonction f monotone croissante : si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.

Exemple 1.24. — Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est croissante. Pour ces n, la fonction est-elle strictement croissante ? Mêmes questions pour $x \in]0, +\infty[\mapsto x^n \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.25. — La fonction $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ est-elle décroissante ?

Exemple 1.26. — La fonction $f : x \in [0, +\infty[\mapsto f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ est strictement croissante. En effet, pour tous $a, b \in [0, +\infty[$, $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Ainsi,

$$0 \leqslant a < b \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad (a-b)(a+b) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(a) - f(b) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b)\,.$$

Exemple 1.27. — Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ et $x \in]0, +\infty[\mapsto \ln(x)$ sont strictement croissantes.

Proposition 1.28. — *Soit $f : A \to \mathbb{R}$. Alors f n'est pas monotone si et seulement si il existe $(x, y, z) \in A^3$ vérifiant $x < y < z$ et tels que*

$$(f(x) < f(y) \,\text{et}\, f(z) < f(y)) \quad \textit{ou} \quad (f(y) < f(x) \,\text{et}\, f(y) < f(z))\,.$$

1.4.3. Fonctions périodiques. —

Définition 1.29. — Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est périodique lorsqu'il existe $p \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$A + p = A\,, \quad \forall x \in A\,, \quad f(x+p) = f(x)\,.$$

Dans ce cas, on dit que p est une période. Notons que $A + p := \big\{x + p, x \in A\big\}$.

Proposition 1.30. — *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des périodes (auquel on ajoute 0), alors, si $p_1 \in \mathcal{P}$ et $p_2 \in \mathcal{P}$, on a aussi $p_1 \pm p_2 \in \mathcal{P}$. De plus, f possède une période strictement positive.*

Définition 1.31. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Si $\mathcal{P} \cap]0, +\infty[$ possède un minimum (non nul), ce nombre est appelé la période de f.

Exemple 1.32. — Les fonctions cos et sin admettent pour périodes les nombres $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Leur période est 2π. La période de la fonction tan est π.

1.4.4. Symétries. —

Définition 1.33. — Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

i. On dit que f est paire si pour tout $x \in A$ on $-x \in A$ et $f(x) = f(-x)$.

ii. On dit que f est impaire si pour tout $x \in A$ on a $-x \in A$ et $f(x) = -f(-x)$.

Proposition 1.34. — *Soient $S_{(Oy)} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x, y) \in \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et $S_O : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$ la symétrie centrale de centre $(0, 0)$. Alors, les assertions suivantes sont vraies.*

i. *Une fonction f est paire si et seulement si $S_{(Oy)}\,(\text{Graphe}(f)) = \text{Graphe}(f)$.*

ii. *Une fonction f est impaire si et seulement si $S_O\,(\text{Graphe}(f)) = \text{Graphe}(f)$.*

Définition 1.35. — Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Soit $a \in A$. On dit que f est paire par rapport à a quand la fonction g définie sur $A - a$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par, $g(x) = f(a + x)$, pour tout $x \in A - a$, est une fonction paire. On dit que f est impaire par rapport au point $I = (a, b)$ si la fonction $h : A \ni x \mapsto f(x + a) - b$ est impaire.

i. f est paire par rapport à a si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe $x = a$.

ii. f est impaire par rapport à $I(a, b)$ si et seulement si son graphe est symétrique par rapport au point $I(a, b)$, ou encore

$$\forall x \in A, \quad \text{on a} \quad -x + a \in A \quad \text{et} \quad f(a + x) + f(a - x) = 2b$$

Exemple 1.36. — La fonction $f : [0, +\infty[\ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est-elle paire ? Et la fonction $g :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\ni x \mapsto \frac{x^2-4}{1+x^{20}} \in \mathbb{R}$?

Exemple 1.37. — Déterminer un axe de symétrie pour le graphe de $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 + 3x - 4 \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.38. — Trouver un centre de symétrie pour la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \in \mathbb{R}$. En déduire un point par rapport auquel le graphe de la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4x \in \mathbb{R}$ est symétrique.

1.5. Exercices

Exercice 26

Trouver le domaine de définition des fonctions données par les formules suivantes :

1- $\sqrt{x^2 - 3x - 4}$

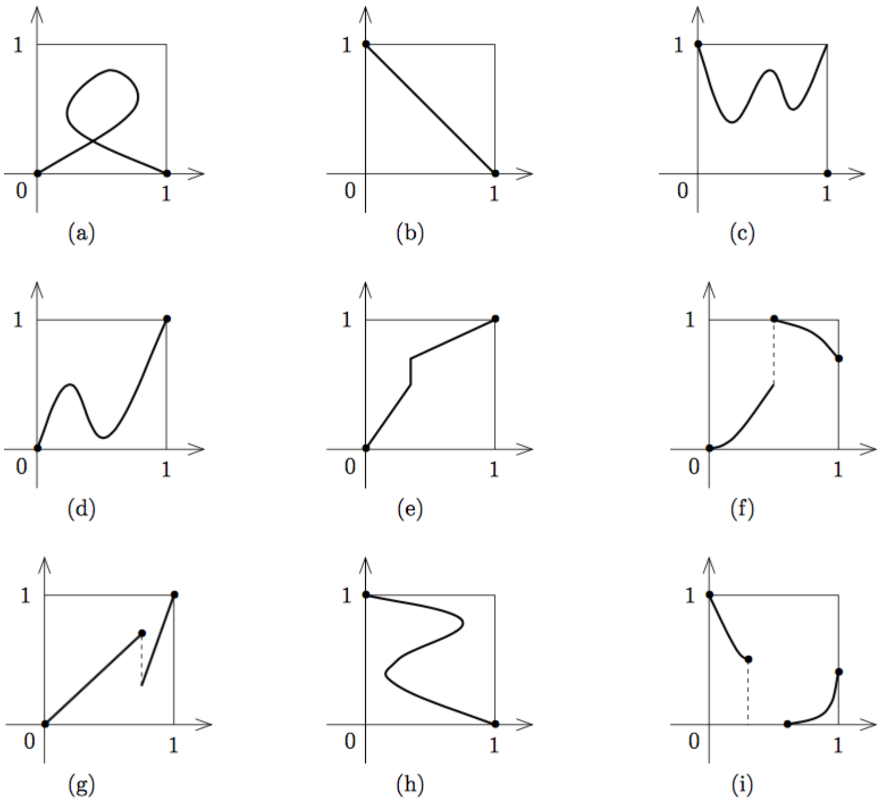
2- $\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - x}}$

3- $\tan(2x)$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 27

Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il s'agit du graphe d'une application, injection, surjection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.



Exercice 28

Prouver que l'application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad f(a, b) = a + b\sqrt{2}$ est injective.

Composition de fonctions

Exercice 29

Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle données par

$$f(x) = \frac{3}{x} \text{ et } g(x) = \frac{2-x}{2+x}.$$

1- Déterminer les antécédents de 0 et -2 par f et de 0 et -2 par g.

2- Trouver le domaine de définition ainsi que l'image de f et de g.
Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions numériques d'une variable réelle définies par

$$f_1(x) = f(f(x)),\ f_2(x) = f(g(x)),\ f_3(x) = g(f(x)) \text{ et } f_4(x) = g(g(x))\,.$$

3- Déterminer le domaine de définition de f_i, $i = 1, \ldots, 4$.

4- Trouver une expression simplifiée de f_i, $i = 1, \ldots, 4$.

Exercice 30

Soit l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ et g l'application définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-1}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 31

On définit deux fonctions f et g sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 - x & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ x - 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ?

Exercice 32

On définit deux applications f et g de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 2/3] \\ 3x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ? Trouver un sous-ensemble de $[0, 1]$ sur lequel $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes restrictions.

Exercice 33

Décomposer les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ à l'aide de fonctions simples : $\sqrt{2x^2+1}$, $\ln(x^2+1)$, $\cos^3(x) + \cos(x)$, $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Fonctions majorées, minorées

Exercice 34

Déterminer si les fonctions suivantes sont majorée, minorée ou bornée :

1- $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

2- $f(x) = \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x(x+1)}$ sur $\mathbb{R}^+$, sur $\mathbb{R}\setminus\{0,\ -1\}$.

3- $f(x) = \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

4- $f(x) = a\lfloor bx \rfloor - b\lfloor ax \rfloor$ où a et b sont des réels strictement positifs.

Exercice 35

1- Déterminer $\inf_{x>0} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Cette fonction admet-elle un minimum ?

2- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$. La fonction f est-elle minorée ? admet-elle un minimum ?

Exercice 36

Pour les fonctions suivantes, dire si elles sont minorées ou/et majorées et si oui donner un minorant ou/et un majorant.

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = -2\sin(x^2 + 2x - 1) + 2$.

2. $g : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3. $h : x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) = \frac{2}{3-\cos(x)}$.
4. $k : x \in [0,5] \mapsto k(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{1+x}$.

Monotonie

Exercice 37

Déterminer les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ qui sont :

1- à la fois croissantes et décroissantes.

2- à la fois monotones et périodiques.

Exercice 38

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1- On suppose que f est une fonction strictement croissante.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$.

2- Montrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est décroissante.

Parité, périodicité

Exercice 39

Parmi les fonctions (de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$) définies par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?

1- $5x^4 - 3x^2$,

2- $2x^4 - x^3 + 1$,

3- $\cos(x^3)$,

4- $\sin(x^5 + x)$,

5- $\exp(|x|)$.

Exercice 40

1- Montrer que le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = x^2 + 2x + 3$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$.

2- Montrer que le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$ est symétrique par rapport au point $M(1, -5)$.

Définition d'applications

Exercice 41

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

1- Les applications définies ci-dessous appartiennent-elles à E ?

a- f est une application constante

b- $f : x \mapsto 3x - 1$

c- $f : \left[\begin{array}{ll} 0 & \mapsto 0 \\ x & \mapsto 1 \text{ si } x \neq 0 \end{array} \right.$

d- $f : \left[\begin{array}{ll} 1 & \mapsto 0 \\ x & \mapsto 1 \text{ si } x \neq 1 \end{array} \right.$

2- On suppose que f appartient à A.

1- Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(4t) = f(t)$.

2- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

Exercice 42

Soit f et g, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
On définit les fonctions $f_+ = \sup(f,\ 0)$ et $f_- = \sup(-f,\ 0) = -\inf(f,\ 0)$.

1- Montrer que : $f_+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f_- = \frac{|f|-f}{2}$.

2- Exprimer $|f|$ et f en fonction de f_+ et de f_-

3- Montrer que, si g et h sont deux fonctions positives telles que $f = g - h$, alors $f_+ \leqslant g$ et $f_- \leqslant h$.

4- Vérifier : $\sup(f_+,\ f_-) = |f|$ et $\inf(f_+,\ f_-) = 0$.

5- Montrer : $(f+g)_+ \leqslant f_+ + g_+$. Peut-il y avoir inégalité stricte dans cette inégalité ?

6- Montrer que : $f \leqslant g \Leftrightarrow (f_+ \leqslant g_+$ et $g_- \leqslant f_-)$.

Pour aller plus loin

Exercice 43

Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant les affirmations suivantes :

1- $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$

2- $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$

3- $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

4- $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) - f(x - y) = 4xy$

5- $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(x^2 - 1) = x$

6- $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y^2) = f(x^2) + f(y)$
(Indication : Calculer $f(0)$. Montrer que $f(x) = f(x^2) = f(x^4)$ puis calculer : $f((-x^2) + x^2)$.)

Exercice 44

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction telle que : $\forall x \in [0,1] \quad 2x - f(x) \in [0,1]$ et $f(2x - f(x)) = x$. On définit g par $g(x) = 2x - f(x)$.

1- Montrer que $\forall n \geqslant 1 \quad g^{[n]}(x) - x = n(g(x) - x)$ où $g^{[n]} = g \circ g \circ \cdots \circ g$ (n fois)

2- Majorer $|g(x) - x|$. En déduire une expression de g

3- En déduire une expression de f.

Exercice 45

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que

1- $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = nf(1)$.

2- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = nf(1)$.

3- $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = qf(1)$.

4- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xf(1)$
(Indication : on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x).

CHAPITRE 2

SUITES NUMÉRIQUES

2.1. Introduction

Définition 2.1. — Une suite numérique réelle (resp. complexe) est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (resp. $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). On écrit u_n au lieu de $u(n)$ et donc $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2.2. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On peut considérer la suite associée à f donnée par $u_n = f(n)$. Par exemple $(\sqrt{n^2+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est associée à la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

On considère les suites les plus simples possibles i.e construites à partir de l'addition et de la multiplication des nombres.

***Définition 2.3* (suite arithmétique).** — Soient a, r deux nombres complexes. On appelle suite arithmétique de premier terme a et de raison r la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.4. — *Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme a et de raison r. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$u_n = a + nr.$$

Démonstration. — Montrer la proposition par récurrence. □

***Définition 2.5* (suite géométrique).** — Soient a, r deux nombres complexes. On appelle suite géométrique de premier terme a et de raison r la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = ru_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.6. — *Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme a et de raison r. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$u_n = ar^n.$$

Démonstration. — Montrer la proposition par récurrence. □

Voici des formules très utiles concernant la somme des premiers termes des suites arithmétiques et géométriques.

Proposition 2.7. — *Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme a et de raison r. On a*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)a + r\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Démonstration. — On a $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(a+kr) = (n+1)a + rS$ où $S = \sum_{k=0}^{n} k$. Pour calculer S on en prend deux copies que l'on écrit dans des sens opposés et on somme les deux termes à la même place dans chaque somme i.e

$$\begin{aligned} 2S = S + S &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n + (n-1) + \cdots + 1) \\ &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)\,. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.8 **(formule de la progression arithmétique)**

En considérant la somme des premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1 on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 2.9. — *Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme a et de raison r. On a*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \text{ si } r \neq 1 \\ a(n+1) \text{ si } r = 1\,. \end{cases}$$

2.2. Suites récurrentes affines ou arithmético-géométrique

Définition 2.10 **(suite arithmético-géométrique).** — On appelle suite arithmético-géométrique une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation de récurrence affine du type

$$u_{n+1} = au_n + b$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ où a, b sont des complexes indépendants de n.

Proposition 2.11. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = au_n + b\,.$$

La suite (u_n) est uniquement définie par la donnée de u_0, a et b et plus précisément on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \begin{cases} u_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a} \text{ si } a \neq 1 \\ u_0 + nb \text{ si } a = 1\,. \end{cases}$$

Démonstration. — On vérifie la formule par récurrence. □

2.3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2.12 **(suite récurrente linéaire d'ordre 2)**

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie une relation de récurrence linéaire du type

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ où a, b sont des complexes indépendants de n et on suppose $b \neq 0$ pour que la relation soit bien d'ordre 2.

Remarque 2.13. — La célèbre suite de Fibonacci correspond à $a = b = 1$.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. La suite est uniquement définie par la donnée de u_0, u_1 et les complexes a, b de la formule de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \,. \tag{2.3.1}$$

On cherche à exprimer u_n en fonction des données u_0, u_1, a,b et n.

En s'inspirant de la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, on cherche des suites solutions de (2.3.1) qui sont d'un type "simple" par exemple géométrique : $u_n = r^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $r \in \mathbb{C}^*$. Cette suite est solution de (2.3.1) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad r^{n+2} - ar^{n+1} - br^n = 0$$

si et seulement si

$$r^2 - ar - b = 0\,. \tag{2.3.2}$$

Cette dernière équation s'appelle *l'équation caractéristique* associée à la relation de récurrence (2.3.1). On va déterminer les suites (u_n) satisfaisant (2.3.1) en fonction des solutions de l'équation caractéristique (2.3.2). Notant Δ le discriminant de (2.3.2), on a

$$\Delta = a^2 + 4b\,.$$

2.3.1. Résolution complexe. —

2.3.1.1. *Cas 1 :* $\Delta \neq 0$. — L'équation caractéristique (2.3.2) admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ et donc les suites géométriques (r_1^n) et (r_2^n) vérifient (2.3.1). La relation (2.3.1) étant linéaire, il n'est pas difficile de voir que pour tout $A, B \in \mathbb{C}$ fixés la suite $(Ar_1^n + Br_2^n)$ vérifie encore (2.3.1). On va montrer que dans ce cas toutes les suites vérifiant (2.3.1) sont de cette forme. Soit (u_n) satisfaisant (2.3.1) qui est bien définie et donc on connait les valeurs de u_0 et u_1. Imaginons qu'il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, cela donne le système suivant à résoudre

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ r_1 A + r_2 B = u_1 \end{cases}\,.$$

On trouve

$$A = \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1}\,, \quad B = \frac{-u_0 r_1 + u_1}{r_2 - r_1}\,.$$

Pour ce choix de A et B, on doit donc avoir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ (puisque ces deux suites ont les mêmes conditions initiales et satisfont la même relation de récurrence d'ordre 2).

2.3.1.2. *Cas 2 :* $\Delta = 0$. — Le nombre $r = a/2$ est racine double de l'équation caractéristique (2.3.2) et donc la suite $((a/2)^n)$ vérifie (2.3.1). On cherche une deuxième suite (u_n) solution de (2.3.1) sous la forme $u_n = (a/2)^n v_n$. La suite (u_n) vérifie (2.3.1) si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a/2)^{n+2} v_{n+2} = a(a/2)^{n+1} v_{n+1} + b(a/2)^n v_n$$

si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a^{n+2}/2^{n+2}) v_{n+2} = a(a/2)^{n+1} v_{n+1} - (a^2/4)(a/2)^n v_n$$

si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$. Les suites $v_n = n$ et $v_n = 1$ sont solutions évidentes de cette dernière équation. En écrivant que, pour tout n, $v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n$, on obtient qu'il existe A tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = A\,,$$

et on reconnaît donc une suite arithmétique. Il existe donc $A, B \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (a/2)^n(An + B)$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, cela donne le système suivant à résoudre $\begin{cases} B = u_0 \\ aA + aB = 2u_1 \end{cases}$. On trouve $A = (2/a)u_1 - u_0$ et $B = u_0$ (comme $b \neq 0$ et $\Delta = 0$ on a $a \neq 0$).

On résume cette résolution dans le théorème suivant.

Théorème 2.14. — *Les suites complexes (u_n) vérifiant la relation* (2.3.1) *sont :*

1) *Les combinaisons linéaires complexes des suites (r_1^n) et (r_2^n) où r_1 et r_2 sont les racines distinctes de l'équation caractéristique* (2.3.2) *associée et dans le cas où le discriminant Δ de* (2.3.2) *est non nul.*
2) *Les combinaisons linéaires complexes des suites (r^n) et (nr^n) où r est la racine double de l'équation caractéristique* (2.3.2) *associée et dans le cas où le discriminant Δ de (2.3.2) est nul.*

Dans les deux cas les valeurs des coefficients de la combinaison linéaire sont fixées par celles de u_0 et u_1.

2.3.2. Résolution réelle. — On suppose maintenant que la relation (2.3.1) est réelle i.e. que les nombres a et b sont réels ($b \neq 0$). On cherche maintenant les suites réelles vérifiant (2.3.1). Il y a maintenant trois cas dépendant du signe de Δ.

2.3.2.1. *Cas 1 :* $\Delta > 0$. — L'équation caractéristique (2.3.2) admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. En reprenant la stratégie du premier cas de la résolution complexe, la suite réelle (u_n) vérifie (2.3.1) si et seulement si

$$(u_n) = \left(\frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{-u_0 r_1 + u_1}{r_2 - r_1} r_2^n\right).$$

2.3.2.2. *Cas 2 :* $\Delta = 0$. — Le nombre $r = a/2$ est racine double réelle de l'équation caractéristique (2.3.2). En reprenant la stratégie du deuxième cas de la résolution complexe, la suite réelle (u_n) vérifie (2.3.1) si et seulement si

$$(u_n) = (((2/a)u_1 - u_0)nr^n + u_0 r^n).$$

2.3.2.3. *Cas 3 :* $\Delta < 0$. — L'équation caractéristique admet deux racines distinctes complexes et conjuguées $\rho e^{\imath\theta}$ et $\rho e^{-\imath\theta}$ ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \neq 0\,[\pi]$). En voyant une suite réelle comme la partie réelle d'une suite complexe de partie imaginaire nulle et en utilisant la résolution complexe, on voit que les suites réelles vérifiant (2.3.1) sont exactement les parties réelles des suites complexes vérifiant (2.3.1) qui sont elles des combinaisons linéaires complexes de $(\rho^n e^{\imath n\theta}) = (\rho^n(\cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta)))$ et $(\rho^n e^{-\imath n\theta}) = (\rho^n(\cos(n\theta) - \imath\sin(n\theta)))$. On en déduit que les suites réelles (u_n) vérifiant (2.3.1) sont exactement de la forme $(\rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)))$ avec

$$A = u_0\,, \quad B = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{u_1}{\rho} - u_0\cos\theta\right).$$

On résume cette résolution dans le théorème suivant :

Théorème 2.15. — *Les suites réelles (u_n) vérifiant la relation (2.3.1) sont :*

1) *Les combinaisons linéaires réelles des suites (r_1^n) et (r_2^n) où r_1 et r_2 sont les racines réelles distinctes de l'équation caractéristique* (2.3.2) *associée et dans le cas où le discriminant Δ de* (2.3.2) *est strictement positif.*
2) *Les combinaisons linéaires réelles des suites (r^n) et (nr^n) où r est la racine double réelle de l'équation caractéristique* (2.3.2) *associée et dans le cas où le discriminant Δ de* (2.3.2) *est nul.*

3) *Les combinaisons linéaires réelles des suites* $(\rho^n \cos(n\theta))$ *et* $(\rho^n \sin(n\theta))$ *où* ρ *et* θ *sont respectivement le module et un des deux arguments des deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique* (2.3.2) *associée et dans le cas où le discriminant* Δ *de* (2.3.2) *est strictement négatif.*

Dans les trois cas les valeurs des coefficients de la combinaison linéaire sont fixées par celles de u_0 *et* u_1.

Exemple 2.16. — Soit (u_n) une suite réelle vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\,.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$. Par le Théorème 2.15, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = A + B2^n\,.$$

Exemple 2.17. — Soit (u_n) une suite réelle vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$. Par le Théorème 2.15, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = A + Bn\,.$$

Exemple 2.18. — Soit (u_n) une suite réelle vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = (r - e^{2\imath\pi/3})(r - e^{-2\imath\pi/3}) = 0$. Par le Théorème 2.15, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = A\cos(2n\pi/3) + B\sin(2n\pi/3)\,.$$

2.4. Limite finie d'une suite

Définition 2.19. — Soit (u_n) une suite et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) admet ℓ comme limite ou converge vers ℓ ou tend vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

Dans ce cas on utilisera indifféremment les notations suivantes $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.

Remarque 2.20. — 1) Dans la définition précédente, le N dépend de ε.

2) Si (u_n) est une suite réelle et si $\ell \in \mathbb{R}$, l'inégalité $\mid u_n - \ell \mid < \varepsilon$ est équivalente à $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

3) La suite (u_n) tend vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0.

4) Dans la définition précédente, on peut changer $< \varepsilon$ par $\leqslant \varepsilon$.

Exemple 2.21. — La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ admet 1 comme limite. Soit $\varepsilon > 0$ et posons N le plus petit entier $\geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Alors

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - 1| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon\,.$$

Théorème 2.22. — *Si une suite numérique admet une limite finie alors elle n'en admet pas d'autre. Autrement dit, si* (u_n) *admet* ℓ_1 *et* ℓ_2 *comme limites finies alors* $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. — On suppose $\ell_1 \neq \ell_2$ et on pose $\varepsilon = |\frac{\ell_1 - \ell_2}{3}|$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| < \varepsilon$ et $n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \ell_2| < \varepsilon$. Ainsi, pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |\ell_2 - u_n| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui est impossible. □

Définition 2.23. — On dit qu'une suite est convergente si elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que la suite est divergente. La nature d'une suite est *convergente* ou *divergente.*

Remarque 2.24. — On ne change pas la nature d'une suite en modifiant un nombre fini de termes de la suite.

Définition 2.25. — 1) On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels est majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.

2) On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels est minorée si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

3) On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels est bornée si elle est majorée et minorée i.e il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Proposition 2.26. — *Une suite réelle convergente est bornée.*

Démonstration. — On suppose que (u_n) converge vers ℓ. Pour $\varepsilon = 1$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < 1$ et donc $n \geqslant N \Rightarrow |u_n| < |\ell| + 1$. On en déduit que $|u_n| \leqslant \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$. □

Proposition 2.27. — *Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \to 0$ et (v_n) est bornée. Alors $u_n v_n \to 0$.*

Démonstration. — Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |u_n v_n| \leqslant \varepsilon$. □

Exemple 2.28. — D'après la Proposition 2.27 la suite $(\frac{\sin n}{n})_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.

Définition 2.29. — Une suite numérique (u_n) est dite stationnaire si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_n = u_N$.

Remarque 2.30. — Une suite stationnaire est convergente (vers u_N dans la définition précédente).

Voici quelques résultats sur le comportement algébrique des suites convergentes ainsi que sur la composition par une fonction continue.

Proposition 2.31. — *Soient (u_n), (v_n) deux suites numériques convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' deux nombres complexes. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :*

1) *La suite $(u_n + v_n)$ est convergente vers $\ell + \ell'$.*

2) *La suite $(u_n v_n)$ est convergente vers $\ell\ell'$.*

3) *La suite (λu_n) est convergente vers $\lambda\ell$.*

4) *La suite $(|u_n|)$ est convergente vers $|\ \ell\ |$.*

5) *Si $\ell \neq 0$ alors pour n assez grand la suite $(1/u_n)$ est bien définie et converge vers $1/\ell$.*

Remarque 2.32. — Les points 1) et 3) dans la proposition précédente montrent que l'ensemble des suites complexes convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes et aussi que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

Démonstration. — Les preuves des points 3) et 4) sont très faciles et à faire en exercice. Montrons d'abord 1). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon/2$ et $n \geqslant N \Rightarrow |v_n - \ell'| < \varepsilon/2$. On en déduit que

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n + v_n - \ell - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \varepsilon\,.$$

Montrons maintenant 2). Il suffit de montrer que $u_nv_n - \ell\ell' \to 0$. On a $u_nv_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$ et comme v_n est bornée en module par 4) et la Proposition 2.26 on peut conclure en utilisant la Proposition 2.27.

On laisse la preuve du point 5) en exercice. Dans le cas réel, on pourra utiliser la Proposition 2.33. □

Proposition 2.33. — *Soient (u_n) une suite réelle convergente vers ℓ et f une fonction définie et continue au voisinage de ℓ. Alors, pour n assez grand la suite $(f(u_n))$ est bien définie et converge vers $f(\ell)$.*

Démonstration. — Exercice. □

Exemple 2.34. — D'après la Proposition 2.33 la suite $(\cos(1/n))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

2.5. Suites réelles de limites infinies

Définition 2.35. — Soit (u_n) une suite réelle.

1) On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ (on note alors $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}\,, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A\,.$$

2) On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ (on note alors $\lim u_n = -\infty$ ou $u_n \to -\infty$) si $\forall A \in \mathbb{R}$,

$$\forall A \in \mathbb{R}\,, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant A\,.$$

Exemple 2.36. — La suite $(n^2 + n + 3)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. En effet soit $A \in \mathbb{R}$ et soit N un entier plus grand que $\mid A \mid$. On a $n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant n \geqslant N \geqslant \mid A \mid \geqslant A$.

On peut généraliser le résultat de la Proposition 2.33.

Proposition 2.37. — *Soient (u_n) une suite réelle tendant vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f une fonction définie au voisinage de ℓ et telle que f admette une limite finie ou infinie quand $x \to \ell$. Alors, pour n assez grand la suite $(f(u_n))$ est bien définie et converge vers $\lim_{x\to\ell} f(x)$.*

Démonstration. — Exercice. □

Exemple 2.38. — Soit (u_n) une suite réelle tendant vers $+\infty$. D'après la Proposition 2.37 la suite $(1/u_n)$ tend vers 0^+.

Voici quelques résultats à démontrer en exercice.

Proposition 2.39. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

1) *Si $u_n \to +\infty$ alors (u_n) est minorée.*
2) *Si $u_n \to -\infty$ alors (u_n) est majorée.*
3) *Si $u_n \to +\infty$ et (v_n) est minorée alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.*
4) *Si $u_n \to -\infty$ et (v_n) est majorée alors $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.*
5) *Si $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) et (v_n) est minorée à partir d'un certain rang par un nombre strictement positif alors (u_nv_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*
6) *Si $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) et (v_n) est majorée à partir d'un certain rang par un nombre strictement négatif alors (u_nv_n) tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).*

On déduit de la proposition précédente :

Corollaire 2.40. — *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles.*

1) *Si* $u_n \to +\infty$ *et* $v_n \to +\infty$ *alors* $(u_n + v_n)$ *tend vers* $+\infty$.

2) *Si* $u_n \to -\infty$ *et* $v_n \to -\infty$ *alors* $(u_n + v_n)$ *tend vers* $-\infty$.

3) *Si* $u_n \to +\infty$ *et* $v_n \to +\infty$ *alors* $(u_n v_n)$ *tend vers* $+\infty$.

4) *Si* $u_n \to -\infty$ *et* $v_n \to -\infty$ *alors* $(u_n v_n)$ *tend vers* $+\infty$.

5) *Si* $u_n \to +\infty$ *et* $v_n \to -\infty$ *alors* $(u_n v_n)$ *tend vers* $-\infty$.

2.6. Sous-suites

Définition 2.41. — Soit (u_n) une suite numérique. On appelle sous-suite ou suite extraite de (u_n) toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 2.42. — Soit (u_n) une suite numérique. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des sous-suites de (u_n).

Proposition 2.43. — *Si une suite numérique tend vers* ℓ *avec* $\ell \in \mathbb{C}$ *ou* $\ell = +\infty$ *ou* $\ell = -\infty$ *(dans les deux derniers cas la suite est réelle) alors toute sous-suite tend aussi vers* ℓ.

Démonstration. — La preuve est facile car si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors $\varphi(n) \geqslant n$ (le montrer par récurrence). □

Remarque 2.44. — La Proposition 2.43 est souvent utilisée sous sa forme contraposée pour montrer qu'un suite n'admet pas de limite finie ou infinie. Soit $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La sous-suite (u_{2n}) tend vers 1, la sous-suite (u_{2n+1}) tend vers -1 et par conséquent la suite (u_n) n'admet pas de limite finie ni de limite infinie.

Définition 2.45. — On appelle valeur d'adhérence d'une suite numérique (u_n) tout élément de $\mathbb{C}$ qui est limite d'une sous-suite de (u_n).

Exemple 2.46. — Les valeurs d'adhérence de $((-1)^n)$ sont 1 et -1.

Une conséquence immédiate de la Proposition 2.43 est la suivante.

Corollaire 2.47. — *Une suite numérique convergente possède une seule valeur d'adhérence.*

Remarque 2.48. — La réciproque du Corollaire 2.47 n'est pas vraie. La suite (u_n) définie par $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ n \text{ sinon} \end{cases}$ est divergente mais n'admet que 0 comme valeur d'adhérence.

Voici un cas particulier où la réciproque de la Proposition 2.43 et le Corollaire 2.47 fonctionnent.

Proposition 2.49. — *Soit* (u_n) *une suite numérique et soit* $\ell \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ *(dans les deux derniers cas* (u_n) *est réelle). Alors*

$$u_n \to \ell \Leftrightarrow ((u_{2n}) \to \ell \text{ et } (u_{2n+1}) \to \ell)\,.$$

Démonstration. — Exercice. □

2.7. Limites de suites réelles et inégalités

On conserve les inégalités larges par passage à la limite :

Proposition 2.50. — *Soit (u_n) une suite réelle convergente et soit $a \in \mathbb{R}$.*

1) *Si $u_n \geqslant a$ pour n assez grand alors $\lim u_n \geqslant a$.*
2) *Si $u_n \leqslant a$ pour n assez grand alors $\lim u_n \leqslant a$.*

Démonstration. — On montre 1) par l'absurde. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant a$ (quitte tronquer la suite) et $\lim u_n = \ell < a$. On pose $\varepsilon = a - \ell$. Par définition de la limite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_n < \ell + \varepsilon \leqslant a$, impossible. □

Corollaire 2.51. — *Soient (u_n), (v_n) deux suite réelles convergentes. Si à partir d'un certain rang on a $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.*

Démonstration. — On applique le 1) de la Proposition 2.50 pour $a = 0$ et la suite $(v_n - u_n)$. □

Remarque 2.52. — Les inégalités strictes ne sont pas toujours conservées par passage à la limite, par exemple $1/n > 0$ pour tout $n > 0$ mais $\lim 1/n = 0$.

Voici un fameux théorème.

***Théorème 2.53* (dit "des gendarmes").** — *Soient (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites réelles telles que pour n assez grand on ait $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$. Si (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors (u_n) est convergente et sa limite est ℓ.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ on a $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$, $a_n \geqslant \ell - \varepsilon$ et $b_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On en déduit que

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

□

Pour les limites infinies, on a besoin d'une seule inégalité.

Proposition 2.54. — *Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que pour n assez grand on ait $u_n \leqslant v_n$.*

1) *Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.*
2) *Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.*

2.8. Suites réelles monotones et adjacentes

Définition 2.55. — Soit (u_n) une suite réelle.

1) (u_n) est dite (resp. strictement) croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).
2) (u_n) est dite (resp. strictement) décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
3) (u_n) est dite (resp. strictement) monotone si elle est (resp. strictement) croissante ou (resp. strictement) décroissante.

Le théorème suivant est admis, il est basé sur une propriété importante de $\mathbb{R}$ concernant l'existence de borne supérieure (le plus petit des majorants) pour une partie de $\mathbb{R}$ qui est majorée.

Théorème 2.56. — *Soit (u_n) une suite réelle.*

1) *Si (u_n) est croissante et majorée alors elle converge (vers $\ell = \sup\{u_n\}$).*

2) *Si* (u_n) *est décroissante et minorée alors elle converge (vers* $\ell = \inf\{u_n\}$*).*

Exemple 2.57. — La suite $(1/n)_{n>0}$ est décroissante minorée par -7 et converge vers $0 = \inf\{1/n,\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Une suite monotone admet toujours une limite finie ou infinie.

Proposition 2.58. — *Soit* (u_n) *une suite réelle monotone.*

1) On suppose (u_n) *croissante. Si elle est majorée alors elle converge et sinon* $\lim u_n = +\infty$.

2) On suppose (u_n) *décroissante. Si elle est minorée alors elle converge et sinon* $\lim u_n = -\infty$.

Démonstration. — On montre seulement le 1). En utilisant le Théorème 2.56 on peut supposer que (u_n) est croissante et non majorée. Comme elle n'est pas majorée, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M$. Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant u_N$ et donc $u_n > M$. On a montré que $u_n \to +\infty$. □

Définition 2.59. — On dit que les suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si

1) (u_n) est croissante.

2) (v_n) est décroissante.

3) $\lim(v_n - u_n) = 0$.

***Théorème 2.60* (des suites adjacentes).** — *Si les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont même limite. Si* $\ell \in \mathbb{R}$ *est la limite commune alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

et les inégalités deviennent strictes en cas de stricte monotonie des suites.

Démonstration. — On pose $w_n = v_n - u_n$. On a

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0\,.$$

La suite (w_n) est donc décroissante de limite nulle, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n \geqslant 0$ (raisonner par l'absurde, si $w_N < 0$ alors $\forall n \geqslant N$, $w_n \leqslant w_N$ et donc $0 = \lim w_n \leqslant w_N < 0$, impossible). On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0\,.$$

Par conséquent, (u_n) est croissante majorée (par v_0) donc converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$ (car (u_n) est croissante). La suite (v_n) est décroissante minorée (par u_0) donc convergente vers $\ell' \in \mathbb{R}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant \ell'$ (car (v_n) est décroissante). Comme $\lim(v_n - u_n) = 0$ on a $\ell = \ell'$. □

Remarque 2.61. — Les inégalités dans le Théorème 2.60 permettent d'obtenir des valeurs approchées de ℓ aussi précises que l'on veut. En effet, u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ à $v_n - u_n$ près et on a $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Exemple 2.62. — Les suites (u_n) et (v_n), où pour $n \geqslant 1$ on a $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes. En effet, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} \geqslant 0$, $v_{n+1} - v_n = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \leqslant 0$ et $v_n - u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \to 0$. L'application du Théorème 2.60 n'a pas d'intérêt ici car il est facile de voir que les suites convergent vers 1.

2.9. Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans cette section, on se place dans la situation suivante : soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u_0 \in I$.

On aimerait construire la suite (u_n) définie par les données de u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Il est clair que la suite (u_n) est bien définie quand $f(I) \subset I$ (on dit que I est stable par f), et on se place dans cette situation dans la suite.

2.9.1. Limites finies possibles de la suite. — On peut caractériser la continuité des fonctions en un point en utilisant les suites. Cela s'appelle la caractérisation séquentielle de la continuité.

Théorème 2.63. — *Soit $x_0 \in J$ où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur J. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (v_n) de J convergeant vers x_0 alors la suite $(f(v_n))$ converge vers $f(x_0)$.*

Définition 2.64. — Soit $a \in I$. On dit que a est un point fixe f dans I si $f(a) = a$.

En utilisant le théorème précédent et dans notre situation, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 2.65. — *Si $u_n \to \ell \in I$ alors $f(\ell) = \ell$ i.e ℓ est un point fixe de f dans I.*

Démonstration. — Si $u_n \to \ell$ alors (u_{n+1}) qui est une sous-suite de (u_n) converge aussi vers ℓ. Ainsi, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ et par le Théorème 2.63 on obtient $f(\ell) = \ell$. □

Exemple 2.66. — On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 3$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Ici on peut prendre $I = \mathbb{R}$. Si u_n converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$ et donc $\ell^2 - 2\ell - 3 = (\ell + 1)(\ell - 3) = 0$. Par conséquent les seules limites finies possibles pour (u_n) sont -1 et 3.

2.9.2. Représentation graphique de la suite. —

1) Commencer par tracer le graphe de f en étudiant la fonction et tracer aussi la droite d'équation $y = x$.
2) Placer u_n sur l'axe des abscisses ou plus précisément considérer le point du plan de coordonnées $(u_n, 0)$.
3) Tracer la droite verticale passant par le point $(u_n, 0)$, cette droite va rencontrer le graphe de f en un seul point de coordonnées $(u_n, f(u_n)) = (u_n, u_{n+1})$.
4) Tracer ensuite la droite horizontale passant par (u_n, u_{n+1}), elle rencontre la droite d'équation $y = x$ en un unique point de coordonnées (u_{n+1}, u_{n+1}).
5) Tracer la droite verticale passant par le point (u_{n+1}, u_{n+1}), elle intersecte la droite d'équation $y = 0$ en un unique point de coordonnées $(u_{n+1}, 0)$.

2.9.3. Variations de la suite versus variation de la fonction. — Voici les propriétés de la suite quand la fonction est monotone.

Proposition 2.67. — 1) *Si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone.*

2) *Si f est décroissante sur I alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés.*

Démonstration. — Preuve de 1). Puisque f est croissante $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est du même signe que $u_{n+1} - u_n$. Par récurrence on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_1 - u_0$ et donc que (u_n) est monotone.

Preuve de 2). Si f est décroissante sur I alors $f \circ f$ est croissante sur I. De plus, pour tout n, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$. Par 1) on en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. On a $u_{2n+3} - u_{2n+1} = f(u_{2n+2}) - f(u_{2n})$ et donc $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ est de signe opposé à $u_{2n+2} - u_{2n}$, ce qui montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont des sens de variation opposés. □

Exemple 2.68. — On considère la suite (u_n) donnée par la relation $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$. On pose $f(x) = \sin x$ et $I = [-\pi/2, \pi/2]$.

Comme $f(I) = [-1, 1] \subset I$, la suite (u_n) est bien définie.

Pour déterminer les points fixes de $f(x) = \sin x$, on étudie la fonction $\varphi(x) = \sin x - x$. On a $\varphi'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$ (et ne s'annule qu'en 0) et donc φ est strictement décroissante. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit (Corollaire 2.65) que si (u_n) converge alors sa limite est 0.

Comme f est croissante sur I, la suite (u_n) est monotone (Proposition 2.67).

Si $u_0 \in [-\pi/2, 0]$ alors comme $f([-\pi/2, 0]) \subset [-\pi/2, 0]$, on a, pour tout n, $u_n \in [-\pi/2, 0]$. Comme $\varphi(u_0) = u_1 - u_0 \geqslant 0$ (voir l'étude φ), on en déduit que (u_n) est croissante. Comme elle est majorée (par 0), elle converge et sa limite est 0 comme vu précédemment.

Si $u_0 \in [0, \pi/2]$ alors comme $f([0, \pi/2]) \subset [0, \pi/2]$ on a $\forall n$, $u_n \in [0, \pi/2]$. Comme $\varphi(u_0) = u_1 - u_0 \leqslant 0$ (voir l'étude φ), on en déduit que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge et sa limite est 0 comme vu précédemment.

On a montré que (u_n) est convergente de limite nulle.

Exemple 2.69. — On considère la suite (u_n) donnée par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geqslant 0$.

La suite est clairement bien définie et pour tout n, $u_n \in \mathbb{R}_+$.

Comme $f'(x) = 2x \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ on en déduit que f est croissante et donc que (u_n) est monotone (Proposition 2.67).

On étudie le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16} = (x - \frac{1}{4})(x - \frac{3}{4})$$

et donc $f(x) > x \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$ ou $x > \frac{3}{4}$, $f(x) < x \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$, et $f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ ou $x = \frac{3}{4}$. D'après le Corollaire 2.65, si (u_n) converge alors sa limite est $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$.

1) On suppose $u_0 \in [0, \frac{1}{4}]$. On a $0 \leqslant u_0 \leqslant \frac{1}{4}$ et si $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4}$ alors comme f est croissante on a $0 \leqslant f(0) = \frac{3}{16} \leqslant u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Par récurrence on a, pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4}$. Comme $f(x) \geqslant x$ sur $[0, \frac{1}{4}]$, on a $u_1 \geqslant u_0$ et comme (u_n) est monotone alors on en déduit que (u_n) est croissante. Comme (u_n) est majorée (par $\frac{1}{4}$), la suite (u_n) converge vers une limite $\leqslant \frac{1}{4}$ et donc $\lim u_n = \frac{1}{4}$.
2) On suppose $u_0 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$. On a $\frac{1}{4} \leqslant u_0 < \frac{3}{4}$ et si $\frac{1}{4} \leqslant u_n < \frac{3}{4}$ alors comme f est strictement croissante on a $\frac{1}{4} = f(\frac{1}{4}) \leqslant u_{n+1} = f(u_n) < f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$. Par récurrence on a, pour tout n, $\frac{1}{4} \leqslant u_n < \frac{3}{4}$. Comme $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ alors $u_1 - u_0 \leqslant 0$ et comme on sait aussi que (u_n) est monotone, on en déduit que (u_n) est décroissante. Comme (u_n) est minorée (par $\frac{1}{4}$) alors (u_n) est convergente et la limite appartient à $[\frac{1}{4}, u_0]$ et est un point fixe de f. On a donc $\lim u_n = \frac{1}{4}$.
3) Si $u_0 = \frac{3}{4}$ alors $\forall n$, $u_n = \frac{3}{4}$ et donc (u_n) converge vers $\frac{3}{4}$.
4) On suppose $u_0 \in]\frac{3}{4}, +\infty[$. On a $\frac{3}{4} < u_0$ et si $\frac{3}{4} < u_n$ alors comme f est strictement croissante on a $\frac{3}{4} = f(\frac{3}{4}) < u_{n+1} = f(u_n)$. Par récurrence on a $\forall n$, $\frac{3}{4} < u_n$. Comme $f(x) \geqslant x$ sur $]\frac{3}{4}, +\infty[$, on a $u_1 \geqslant u_0$ et comme (u_n) est monotone alors on

en déduit que (u_n) est croissante. Si (u_n) est majorée alors elle converge vers une limite qui appartient à $[u_0, +\infty[$ et qui est aussi un point fixe de f, impossible. Donc (u_n) est croissante et non majorée et donc $\lim u_n = +\infty$ (Proposition 2.58).

2.9.4. Méthode de Newton. —

Proposition 2.70 **(Méthode de Newton).** — *Soit $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que*

$$\forall x \in [c, d]\,, \quad |g''(x)| \leqslant C_1\,, \quad g'(x) \geqslant C_2\,.$$

On suppose que g s'annule dans $]c, d[$. Ce point est unique et est noté z. On pose, pour tout $x \in [c, d]$,

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}\,.$$

Alors, on a, pour tout $x \in [c, d]$,

$$|f(x) - z| \leqslant \frac{C_1}{2C_2}|x - z|^2\,.$$

De plus, il existe $\alpha \in]0, \frac{2C_2}{C_1}[$ tel que $I = [z - \alpha, z + \alpha]$ vérifie $I \subset [c, d]$ et $f(I) \subset I$.

La suite récurrente définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}\,, \quad u_0 \in I$$

converge vers z. De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - z| \leqslant \left(\frac{2C_2}{C_1}|u_0 - z|\right)^{2^n} \leqslant \left(\frac{2C_2}{C_1}\alpha\right)^{2^n}\,.$$

2.10. Comparaison asymptotiques des suites numériques

2.10.1. Domination et négligeabilité asymptotiques. — On introduit dans cette section des notations dues en partie aux mathématiciens Landau et Hardy.

Définition 2.71 **(Définition formelle de la domination)**

Soient (u_n), (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) et on note $u_n = O(v_n)$ (on prononce u_n est un grand "o" de v_n) s'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n| \leqslant A|v_n|\,.$$

Dans la pratique, on utilisera la proposition suivante.

Proposition 2.72. — *Soient (u_n) une suite numérique et (v_n) une suite numérique ne s'annulant pas pour n assez grand. Si la suite (u_n/v_n) (bien définie pour n assez grand) est bornée en module, alors $u_n = O(v_n)$.*

Exemple 2.73. — Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant 2v_n$ et par conséquent $u_n = O(v_n)$.

Remarque 2.74. — Dire qu'une suite réelle est bornée est équivalent à dire que cette suite est un $O(1)$.

Définition 2.75 **(Définition formelle de la négligeabilité)**

Soient (u_n), (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ (on prononce u_n est un petit "o" de v_n) ou aussi $u_n << v_n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon|v_n|$$

ou de façon équivalente si il existe une suite numérique (ε_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $\lim \varepsilon_n = 0$.

Dans la pratique, on utilisera la proposition suivante.

Proposition 2.76. — *Soient (u_n) une suite numérique et (v_n) une suite numérique ne s'annulant pas pour n assez grand. Si la suite (u_n/v_n) (bien définie pour n assez grand) tend vers 0, alors $u_n = o(v_n)$.*

Exemple 2.77. — Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = n - 2n^2$ et $v_n = n^3$. On a $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} \to 0$ et donc $u_n = o(v_n)$.

Remarque 2.78. — Dire qu'une suite numérique tend vers 0 est équivalent à dire que cette suite est un $o(1)$.

2.10.2. Equivalence asymptotique. —

Définition 2.79 **(Définition formelle de l'équivalence)**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ si $(u_n - v_n) = o(u_n)$.

Proposition 2.80. — *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence pour les suites numériques. Cela signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont des suites numériques alors on a :*

1) $u_n \sim u_n$ *(la relation $\sim$ est réflexive).*
2) $u_n \sim v_n \Rightarrow v_n \sim u_n$ *(la relation $\sim$ est symétrique).*
3) $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n \Rightarrow u_n \sim w_n$ *(la relation $\sim$ est transitive).*

Démonstration. — On a $u_n - u_n = 0 = o(u_n)$ donc $u_n \sim u_n$.

On suppose $u_n \sim v_n$. On a donc $(u_n - v_n) = o(u_n)$ ce qui signifie qu'il existe une suite ε_n tendant vers 0 telle que $|u_n - v_n| = \varepsilon_n |u_n|$. On a donc

$$|u_n| = |u_n - v_n + v_n| \leqslant |v_n| + \varepsilon_n |u_n|$$

ce qui donne (à partir d'un certain rang)

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon_n} |v_n| \, .$$

On en déduit que pour n assez grand

$$|u_n| \leqslant 2|v_n| \, .$$

En particulier, $u_n = O(v_n)$. Pour n assez grand, on a

$$|u_n - v_n| = \varepsilon_n |u_n| \leqslant 2\varepsilon_n |v_n|$$

et comme ε_n tend vers 0, on en déduit que $(v_n - u_n) = o(v_n)$ ce qui montre que $v_n \sim u_n$.

On suppose $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$. On a vu dans la preuve de 2) que $v_n = O(u_n)$ et par conséquent un $o(v_n)$ est un $o(u_n)$. On a $(v_n - u_n) = o(u_n)$ et $(w_n - v_n) = o(v_n) = o(u_n)$ et donc par addition $(w_n - u_n) = o(u_n)$, ce qui montre que $w_n \sim u_n$. □

La proposition suivante fournit une définition pratique de l'équivalence de suites numériques.

Proposition 2.81. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.*

1) $u_n \sim v_n$ *si et seulement s'il existe une suite α_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim \alpha_n = 1$.*
2) *Si v_n ne s'annule pas pour n assez grand, alors $u_n \sim v_n$ si et seulement si la suite (u_n/v_n) (bien définie pour n assez grand) tend vers 1.*

Démonstration. — Il est clairement suffisant de montrer 1).

On suppose $u_n \sim v_n$. Il existe une suite ε_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$ et $\lim \varepsilon_n = 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = 1 + \varepsilon_n$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim \alpha_n = 1$.

On suppose qu'il existe une suite α_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim \alpha_n = 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \alpha_n - 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$ et $\lim \varepsilon_n = 0$ et donc $u_n \sim v_n$. □

Exemple 2.82. — Trouver un équivalent le plus simple possible pour une suite c'est trouver une suite plus "simple" (par exemple polynomiale en n) équivalente à cette suite. Par exemple $(n^3 + n \ln n + \cos n) \sim n^3$ et $(n \ln n - \sin n) \sim n \ln n$.

Remarque 2.83. — Pour trouver un équivalent simple on utilise parfois les DLs : Quand n tend vers $+\infty$ on a $\ln(1 + 1/n) = 1/n + o(1/n)$ donc $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$.

Deux suites équivalentes ont même nature et même limite si elles convergent :

Proposition 2.84. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques équivalentes. Si $u_n \to \ell \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ((u_n) est réelle dans les deux derniers cas) alors $v_n \to \ell$.*

Démonstration. — D'après la Proposition 2.81, il existe une suite α_n telle que pour n assez grand, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim \alpha_n = 1$. Le reste de la preuve est maintenant facile. □

La réciproque de la proposition précédente est vraie dans les cas suivants :

Proposition 2.85. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes admettant la même limite $\ell \in \mathbb{C}^*$. Alors*

$$u_n \sim v_n \sim \ell \,.$$

En particulier, la suite constante (ℓ) est l'équivalent le plus simple possible des suites (u_n) et (v_n).

Démonstration. — On a $\lim(u_n/\ell) = \lim(v_n/\ell) = 1$ et donc $u_n \sim \ell$ et $v_n \sim \ell$. Par transitivité on obtient $u_n \sim v_n$. □

Remarque 2.86. — La réciproque de la Proposition 2.84 n'est pas vraie si $\ell \in \{0\} \cup \{+\infty\} \cup \{+\infty\}$, voici des contre-exemples :
$\ell = 0$: Les suites $(1/n)$ et $(1/n^2)$ tendent toutes les deux vers 0 mais ne sont pas équivalentes car $(1/n)/(1/n^2) = n \to +\infty$.
$\ell = +\infty$: Les suites (n) et (n^2) tendent toutes les deux vers $+\infty$ mais ne sont pas équivalentes.

Voici les opérations qui fonctionnent bien avec les équivalents. Pour des contre-exemples avec la somme et la composition par une fonction, on consultera les exercices.

Proposition 2.87. — *Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) des suites numériques et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1) *Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $(u_n w_n) \sim (v_n t_n)$ (le produit des équivalents est équivalent au produit).*
2) *Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $(u_n/w_n) \sim (v_n/t_n)$ dans le cas où les quotients sont bien définis (le quotient des équivalents est équivalent au quotient).*
3) *Si $u_n \sim v_n$, alors $(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$ (la composition par $x \mapsto x^\alpha$ d'équivalents restent équivalents).*

Démonstration. — La preuve n'est pas difficile, utiliser la caractérisation de suites équivalentes du 1) de la Proposition 2.81. □

2.11. Suites de Cauchy

La notion de *suite de Cauchy* est fondamentale en analyse.

Définition 2.88. — On dit qu'une suite numérique (u_n) est de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de ε) tel que pour tous $m \geqslant N$ et $n \geqslant N$ on ait $|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 2.89. — L'implication

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \, (m \geqslant N \, \text{et} \, n \geqslant N) \Rightarrow |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$$

est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \, n \geqslant N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon \, .$$

Proposition 2.90. — 1) *Toute suite convergente est de Cauchy.*

2) *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*

3) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. — Preuve de 1). Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow | u_n - \ell | \leqslant \varepsilon/2$. On a

$$\forall n \geqslant N \, , \quad \forall m \geqslant N \, , \quad |u_n - u_m| \leqslant |u_n - \ell| + |u_m - \ell| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

et donc (u_n) est de Cauchy.

Preuve de 2). Soit (u_n) une suite de Cauchy et soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \, (m \geqslant N \, \text{et} \, n \geqslant N) \Rightarrow | u_n - u_m | \leqslant \varepsilon \, .$$

Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Comme

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \quad \varphi(n) \geqslant n \, ,$$

on en déduit que pour tous $p \geqslant N$, $q \geqslant N$, on a $\varphi(p) \geqslant N$ et $\varphi(q) \geqslant N$ et donc

$$|u_{\varphi(p)} - u_{\varphi(q)}| \leqslant \varepsilon \, .$$

On a montré que $(u_{\varphi(n)})$ est de Cauchy.

Preuve de 3). Soit (u_n) une suite de Cauchy. Prenons $\varepsilon = 1$. Alors,

$$\exists N \in \mathbb{N} \, , \quad \forall n \geqslant N + 1 \, , \quad |u_n - u_N| \leqslant 1$$

et donc $|u_n| = |u_n - u_N + u_N| \leqslant 1 + |u_N|$. On pose

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_N|, 1 + |u_N|) \, .$$

Alors, pour tout n, $|u_n| \leqslant M$. □

Le point 1) peut être utilisé sous sa forme contraposée pour montrer qu'une suite est divergente : une suite qui n'est pas de Cauchy est divergente.

Exemple 2.91. — On considère la suite de nombres réels $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ définie pour $n \geqslant 1$. Pour tout $n > 0$, on a

$$|u_{2n} - u_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et donc (u_n) n'est pas de Cauchy et donc est divergente. Comme (u_n) est croissante, la Proposition 2.58 dit que $\lim u_n = +\infty$.

Lemme 2.92. — *Soit (u_n) une suite de Cauchy. Si (u_n) admet une sous-suite convergente vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.*

Démonstration. — Soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (u_n) convergeant vers ℓ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon/2\,.$$

Il existe aussi $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $(p \geqslant N_1,\ q \geqslant N_1) \Rightarrow |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon/2$. Pour $n \geqslant \max(N_0, N_1)$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N_1$ et donc

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

□

Voici un théorème important qui dit que les suites réelles ou complexes sont convergentes. On dit que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont *complets*.

Théorème 2.93. — *Toute suite réelle ou complexe de Cauchy est convergente.*

Démonstration. — On fait la démonstration dans le cas des suites réelles. Pour les suites complexes, il faut considérer les parties réelles et imaginaires qui vont être de Cauchy si la suite l'est. Soit (u_n) une suite de Cauchy réelle. Posons $\varphi(0) = 0$ et $\forall n \geqslant 0$ notons $\varphi(n+1)$ le plus petit entier strictement plus grand que $\varphi(n)$ tel que

$$(p \geqslant \varphi(n+1),\ q \geqslant \varphi(n+1)) \Rightarrow |u_p - u_q| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}\,.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{\varphi(n)} - 2^{-n}$. La suite (v_n) est croissante car

$$v_n - v_{n+1} = u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n+1)} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 0\,.$$

De plus (v_n) est majorée car (u_n) est bornée (par 3) de la Proposition 2.90). Donc (v_n) est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Mais $u_{\varphi(n)} \to \ell$ car $2^{-n} \to 0$. Le Lemme 2.92 implique que $u_n \to \ell$. □

Remarque 2.94. — $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet, la suite de nombres rationnels $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente vers $e \notin \mathbb{Q}$ et donc elle est de Cauchy (par 1) de la Proposition 2.90). Mais (u_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ mais seulement dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.95. — Pour montrer qu'une suite réelle est convergente avec la définition il faut déjà connaitre l'éventuelle limite. Par le Théorème 2.93, il est suffisant de montrer qu'elle est de Cauchy et donc il n'y a pas besoin de connaitre l'éventuelle limite.

2.12. Théorème de Bolzano-Weierstrass

On va donner une idée de la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

***Théorème 2.96* (des segments emboités).** — *Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que :*

1) $\forall n,\ a_n \leqslant b_n$.

2) $\forall n,\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

3) $(b_n - a_n) \to 0$.

Alors il existe un nombre réel unique ℓ tel que

$$\bigcap_{n \geqslant 0} [a_n, b_n] = \{\ell\}.$$

Démonstration. — Le suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc convergent vers la même limite ℓ. Comme $\ell = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$ on a bien $\bigcap_{n\geqslant 0}[a_n, b_n] = \{\ell\}$. □

***Théorème 2.97* (de Bolzano-Weierstrass).** — *Un suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. — Soit (u_n) une suite réelle bornée. On va construire par récurrence une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et deux suites réelles adjacentes (a_n), (b_n) telles que, pour tout n, $a_n \leqslant b_n$ et $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$.

Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leqslant M$. On pose $\varphi(0) = 0$, $a_0 = -M$ et $b_0 = M$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on ait construit $\varphi : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\}$ strictement croissante et $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, $(b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ tels que

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}\,, \quad a_i \leqslant b_i\,, \quad u_{\varphi(i)} \in [a_i, b_i]\,, \quad |a_i - b_i| \leqslant \frac{2M}{2^i}$$

de sorte qu'il existe une infinité de $j \in \mathbb{N}$ tels que $u_j \in [a_i, b_i]$.

On va construire $\varphi(n+1)$, a_{n+1} et b_{n+1} tels que

$$\varphi(n+1) > \varphi(n)\,, \quad a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n\,, \quad |a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant \frac{2M}{2^{n+1}}$$

et tels qu'il existe une infinité de $j \in \mathbb{N}$ tels que $u_j \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Supposons qu'il existe une infinité de $j \in \mathbb{N}$ tels que $u_j \in [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$. On pose dans ce cas $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $\varphi(n+1) = j$ pour un $j > \varphi(n)$ tel que $u_j \in [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$. Dans le cas contraire, il existe une infinité de $j \in \mathbb{N}$ tels que $u_j \in [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$. On pose dans ce cas $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$ et $\varphi(n+1) = j$ pour un $j > \varphi(n)$ tel que $u_j \in [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$.

Par le théorème des segments emboités ou le théorème des suites adjacentes, les suites (a_n), (b_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par le théorème des gendarmes $u_{\varphi(n)} \to \ell$. □

2.13. Exercices

Exercice 46

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $3u_{n+1} = u_n + 4$ pour tout $n \geqslant 0$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Montrer que $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant 2$.
3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et donner l'expression de v_n en fonction de n.
6) Soient $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n.
7) Déterminer la limite de (S_n) et celle de (T_n).

Exercice 47

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ $(n \geqslant 0)$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3 - 2^n$ et en déduire la nature de la suite (u_n).

Exercice 48

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$n! \geqslant 2^{n-1}.$$
Que peut-on en déduire pour la suite $(n!)$?

Exercice 49

Soit (u_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} \quad \text{avec} \quad u_0 = a\ ,\ u_1 = b \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique convergente.
2) Calculer $w_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 50

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = 1 + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^4} + \cdots + \dfrac{2n+1}{2^{2n}}$.
2) En utilisant $S_n - \dfrac{S_n}{4}$, donner une expression simplifiée de S_n.
3) En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 51

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq \pm b$. On définit la suite (u_n) par $u_1 = a + b$ et, pour tout $n \geqslant 1$, par
$$u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}.$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 uniquement à l'aide de $a-b, a^2-b^2, a^3-b^3$ et a^4-b^4. Démontrer que le résultat est général.
2) Montrer que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 52

1) Montrer que si, trois nombres réels non nuls x, y, z, sont en progression géométrique, on a, quel que soit n dans $\mathbb{Z}$,
$$(x^n + y^n + z^n)(x^n - y^n + z^n) = x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}.$$
2) Application : déterminer trois nombres en progression géométrique sachant que la somme de leurs inverses est égale à 26 et que la somme des carrés de leurs inverses est égale à 364.

Exercice 53

1) Déterminer une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 1}$, sachant que la somme S_n de ses n premiers termes est, quel que soit n, égale à $3n^2 + 4n$.
2) Certains termes de cette suite sont des carrés parfaits (c'est-à-dire carrés d'un nombre entier) ; donner l'expression générale de ces termes et calculer les six premiers d'entre eux.

Exercice 54

Un segment $[AB]$ a pour longueur a. On appelle M_1 le milieu de $[AB]$, M_2 le milieu de $[AM_1]$, M_3 le milieu de $[M_1M_2], \ldots$, M_n le milieu de $[M_{n-2}M_{n-1}]$.

1) Calculer la longueur de $[AM_n]$ en fonction de a et de n.
2) Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, M_n tend vers une position limite L que l'on déterminera.

Exercice 55

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et étudier sa monotonie.
2) Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 56

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

$$u_n = 3 - \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = 3 + \frac{2}{n+3}.$$

puis

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Exercice 57

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n-6}{u_n-4}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n < 2$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
3) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 58

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. On admet ici que la suite (S_n) n'est pas majorée et qu'elle tend vers $+\infty$. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = S_n - \ln n$.

1) Calculer u_k pour $k \in [\![1, 5]\!]$.

2) Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $x \geqslant \ln(1+x)$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4) On pose à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Quel est le sens de variation de (v_n) ?
5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. La limite commune de ces deux suites est appelée constante d'EULER et notée γ.

6) À l'aide des suites (u_n) et (v_n), donner un encadrement de γ à 10^{-1} près.

Exercice 59

1) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (u_n) par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ et la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1/2$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > \frac{1}{2}$.
   c) Trouver le plus petit entier N tel que, si $n \geqslant N$, on ait $v_n < \frac{3}{4}$.
   d) En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4}\, u_n$.
2) On pose, pour tout entier $n \geqslant 5$: $S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n$. Montrer que

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n-5} \left(\frac{3}{4}\right)^k u_5.$$

   et en déduire que $S_n \leqslant 3u_5$.
3) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ converge.

Exercice 60

Déterminer les suites définies par les relations linéaires d'ordre deux et les conditions indiquées :

1) $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n, u_0 = 0, u_1 = 3$.
2) $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n, u_0 = 5, u_1 = 6$.
3) $u_{n+2} = -9u_n, u_0 = 5, u_1 = 1$.

Exercice 61

On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}$.

1) Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant N$, on ait $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$.

2) Plus généralement, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, déterminer un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant N$, on ait $|u_n - 1| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 62

En revenant aux définitions du cours montrer que

1) la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ converge vers 1,

2) la suite de terme général $u_n = \frac{3}{2^n}$ converge vers 0,

3) la suite de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ tend vers $+\infty$,

4) la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1,

5) la suite de terme général $u_n = \frac{n}{n^3+1}$ converge vers 0,

6) la suite de terme général $u_n = -n + \dfrac{1}{n+1}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 63

Soient (u_n) une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que (u_n) converge vers ℓ si, et seulement si, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers ℓ.

Exercice 64

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{R}$, et soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des *moyennes de Cesàro*, c'est-à-dire la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1) On veut démontrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.
   a) À l'aide de la définition de la limite d'une suite, établir le résultat dans le cas où $\ell = 0$.
   b) En considérant la suite $(u_n - \ell)$ établir le résultat pour ℓ quelconque dans $\mathbb{C}$.
2) En prenant la suite de terme général $(-1)^n$, montrer que la réciproque de cet énoncé est fausse en général.

Exercice 65

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite qui converge vers une limite ℓ non nulle. On suppose que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la relation suivante :

$$\frac{n}{v_n} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$

est convergente et calculer sa limite.
Indication : faire apparaître une moyenne de Cesàro.

Exercice 66

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1) Montrer que ces suites convergent et ont même limite, qu'on notera e.

2) Donner une valeur approchée de e à 10^{-6} près.

3) Montrer que e n'est pas un nombre rationnel.
   Indication : pour 3) supposer par l'absurde que e est rationnel c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme d'une fraction p/q où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, puis observer que $u_q < e < v_q$.

Exercice 67

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 > 0, \quad v_0 > 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

sont adjacentes.

Exercice 68

1) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \max(a,b) &= \dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|) \\ \min(a,b) &= \dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|). \end{cases}$$

Indication : discuter selon que $a < b$ ou $a \geqslant b$.

2) Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$M_n = \max(u_n, v_n) \quad \text{et} \quad m_n = \min(u_n, v_n).$$

Montrer que les suites $(M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(m_n)_{n\geqslant 0}$ convergent et préciser la limite de chacune d'elles en fonction de celle des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 69

Considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$, et posons $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Déterminer $u_0 \in]0, +\infty[$ pour que u_1 soit bien défini et u_2 ne soit pas bien défini.

2) Déterminer $u_0 \in]0, +\infty[$ pour que u_1, u_2 soient bien définis et u_3 ne soit pas bien défini.

3) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $u_0 \in]0, +\infty[$ pour que $u_1, u_2, \ldots, u_N$ soient bien définis et u_{N+1} ne soit pas bien défini.

Exercice 70

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, 1]$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 1$.

3) Montrer que la suite (u_n) est monotone. En déduire que cette suite est convergente.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 71

On considère la suite donnée par $u_0 = 11/4$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}.$$

1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

2) Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est nécessairement égale à 4.

3) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 4.

4) Montrer que $u_n > 5/2$ pour tout $n \geqslant 0$.

5) Montrer que (u_n) est croissante. Conclure.

CHAPITRE 3

LIMITES DES FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE

3.1. Définition de la limite et propriétés

3.1.1. Généralités. —

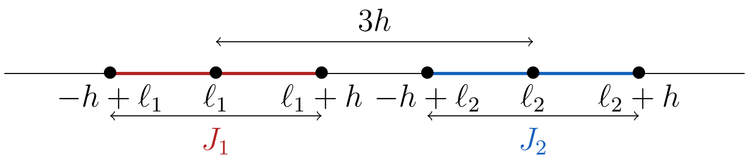
***Définition 3.1* (Limite finie en un point).** — Soit I une partie de $\mathbb{R}$ non vide. Soit a un point adhérent à I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est limite de f en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, (x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\ .$$

Cette définition s'adapte au cas où $a = \pm\infty$.

Proposition 3.2. — *Si $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ sont limites de f en a, alors $\ell_1 = \ell_2$. Ce nombre commun, noté $\lim_{x\to a} f(x)$ est appelé la limite de f en a.*

Démonstration. — Nous faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'on ait à la fois $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$, disons $\ell_1 < \ell_2$. Posons $3h = \ell_2 - \ell_1 > 0$ et considérons les intervalles $J_1 = [-h + \ell_1, \ell_1 + h]$ centré sur ℓ_1 et $J_2 = [-h + \ell_2, \ell_2 + h]$ centré sur ℓ_2, dont l'intersection $J_1 \cap J_2$ est vide.



Par la définition d'une limite, $f(x)$ appartient à J_1 et à J_2 dès que la distance $|x-a|$ entre x et a est assez petite. C'est absurde puisque $J_1 \cap J_2$ est vide. Donc $\ell_1 = \ell_2$ nécessairement. □

Exemple 3.3. — Montrer que $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ admet une limite en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.4. — On considère la fonction partie entière $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$. L'entier relatif $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. En quels points la fonction E admet-elle une limite ?

Si f n'admet pas de limite en a, on dit qu'elle est divergente en a.

Exemple 3.5. — On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \ni x \mapsto \frac{1}{x-1}$. Montrer qu'il existe un point en lequel f n'a pas de limite.

***Définition 3.6* (Limites à droite).** — On suppose que a est un point adhérent à droite de I. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est limite à droite de f en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, (x \in [a, a+\eta[\cap I \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\ .$$

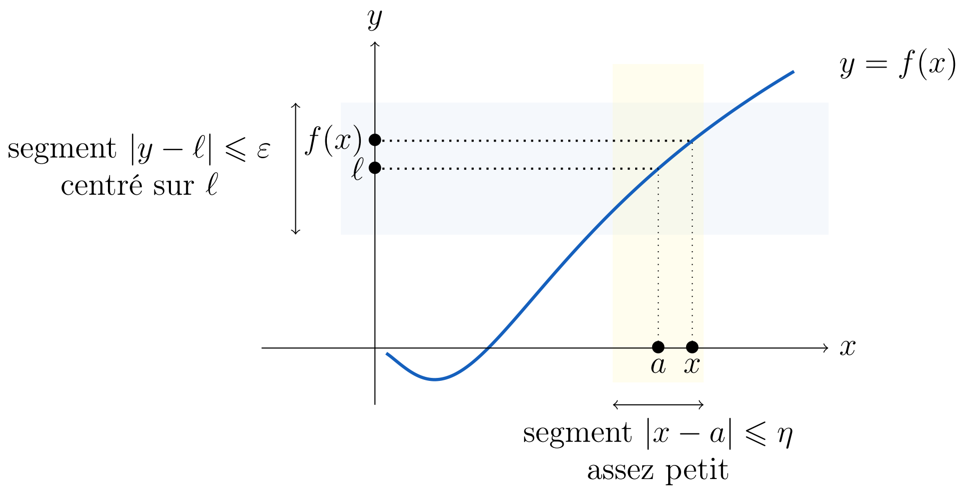


FIGURE 1. Limite $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_0$: pour tout segment $\boxed{|y-\ell| \leqslant \varepsilon}$ centré sur ℓ on peut trouver un segment $\boxed{|x-a| \leqslant \eta}$ centré sur a tel que pour tout x vérifiant $\boxed{|x-a| \leqslant \eta}$, $f(x)$ vérifie $\boxed{|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon}$

Un tel ℓ est unique ; il est appelé la limite à droite de f en a et noté $\lim_{\substack{x\to a \\ x\geqslant a}} f(x)$.

On définit de même la limite à gauche.

Proposition 3.7. — *Si f a une limite en a, alors elle admet une limite à droite et à gauche en a et*

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\geqslant a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\leqslant a}} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)\,.$$

Démonstration. — C'est une conséquence évidente des définitions. □

Proposition 3.8. — *Si f a une limite à droite et à gauche en a et que* ***ces limites coïncident****, alors f a une limite en a et*

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\geqslant a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\leqslant a}} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)\,.$$

***Définition 3.9* (Limite infinie en un point).** — Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point, $a \in I$ et f une fonction définie sur I sauf peut-être en a.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$, quand x tend vers a lorsque tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$, resp. $]-\infty, A]$, contient toutes les valeurs $f(x)$ ($x \in I$ sauf peut-être a) dès que la distance $|x-a|$ de x à a est choisie assez petite. Dans ce cas, on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Cf. Fig. 2.

On définit également la notion de divergence en $\pm\infty$ à droite et à gauche.

Définition 3.10. — On dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, (x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I \implies f(x) \geqslant M)\,.$$

On définit de façon analogue la divergence en $-\infty$.

Exemple 3.11. — 1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, définie sur $I = \mathbb{R}^*$. Le tableau suivant donne les valeurs de $f(x)$ pour des x de plus en plus proche (mais différents) de 0 :

$x =$	$\pm 10^{-5}$ (proche de 0)	$\pm 10^{-10}$ (encore plus proche de 0)
$f(x) =$	10^{10} (proche de $+\infty$)	10^{20} (encore plus proche de $+\infty$)

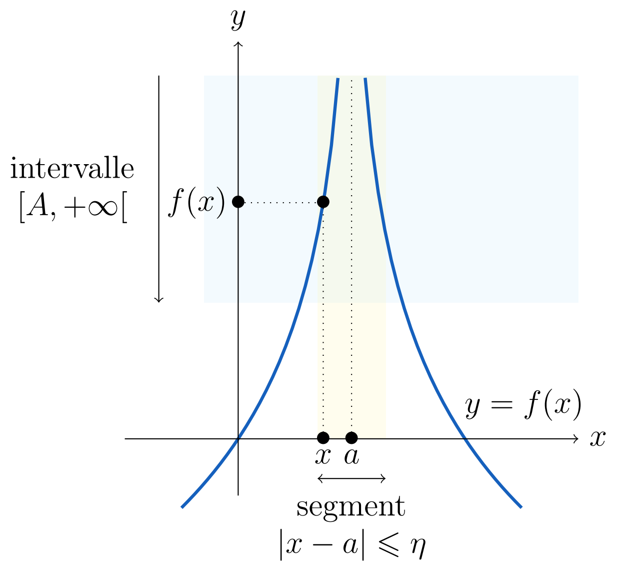


FIGURE 2. Limite $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$: pour tout intervalle $[A, +\infty[$ on peut trouver un segment $|x-a| \leqslant \eta$ tel que pour tout x vérifiant $|x-a| \leqslant \eta$, $f(x)$ vérifie $f(x) \in [A, +\infty[$.

De fait (affirmation) : $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$, définie sur $I = \mathbb{R}^*$. Le tableau suivant donne les valeurs de $f(x)$ pour des $x > 0$ de plus en plus proche de 0 :

$(x > 0) =$	10^{-5} (proche de 0)	10^{-10} (encore plus proche de 0)
$f(x) =$	10^{5} (proche de $+\infty$)	10^{10} (encore plus proche de $+\infty$)

De fait (affirmation) : $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
Le tableau suivant donne à présent les valeurs de $f(x)$ pour des $x < 0$ de plus en plus proche de 0 :

$(x < 0) =$	-10^{-5} (proche de 0)	-10^{-10} (encore plus proche de 0)
$f(x) =$	-10^{5} (proche de $-\infty$)	-10^{10} (encore plus proche de $-\infty$)

De fait (affirmation) : $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Proposition 3.12. — *Si f admet une limite strictement positive (resp. négative) en a, alors il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$).*

3.1.2. Caractérisation séquentielle. — On peut caractériser les limites de fonctions à l'aide de suites. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.13. — *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. *f admet une limite en a.*
ii. *Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\lim u = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.*

Dans ce cas, le ℓ du deuxième point est la limite de f en a.

Démonstration. — Supposons que f admet une limite en a et notons la ℓ. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\lim u = a$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| < \eta$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - a| \leqslant \eta$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $|f(u_n)-\ell| \leqslant \varepsilon$.

Réciproquement, supposons que f n'admette pas ℓ (donné par le deuxième point) comme limite en a. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in I \setminus \{a\}$ avec $|x-a| < \eta$ tel que $|f(x)-\ell| \geqslant \varepsilon$. On choisit $\eta = \frac{1}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et on considère $x_n \in I$ avec $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ tel que $|f(x_n)-\ell| \geqslant \varepsilon$. En passant à la limite, on trouve $0 \geqslant \varepsilon > 0$. C'est une contradiction. ☐

Le lecteur est invité à écrire et démontrer l'énoncé dans le cas où f tend vers $+\infty$ en a.

Exemple 3.14. — Montrer que la fonction $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ n'admet pas de limite en 0.

3.1.3. Propriétés de la limite. —

Proposition 3.15. — *Soient f et g deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$. Soit a adhérent à I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

i. *Si f et g admettent respectivement pour limites ℓ_f et ℓ_g en a, alors $f+g$ admet une limite en a qui vaut $\ell_f + \ell_g$, fg admet une limite en a qui vaut $\ell_f \ell_g$ et λf admet $\lambda \ell_f$ comme limite en a.*

ii. *Si f est bornée et si g tend vers $\pm\infty$, $f+g$ tend vers $\pm\infty$.*

iii. *Si f et g divergent en a vers $\pm\infty$, $f+g$ diverge en a vers $\pm\infty$ et fg diverge en a vers $+\infty$.*

iv. *Si f converge en a vers $\ell_f > 0$ et si g diverge en a vers $\pm\infty$, fg diverge vers $\pm\infty$.*

v. *Si f est bornée et si g tend vers 0 en a, alors fg tend vers 0 en a.*

vi. *Si f ne s'annule pas et est convergente en a de limite $\ell_f \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie près de a et converge vers $\frac{1}{\ell_f}$.*

vii. *Si f ne s'annule pas et diverge en a vers $\pm\infty$, la fonction $\frac{1}{f}$ converge vers 0 en a.*

Limite de la somme $f+g$

$\lim_{x\to a} f(x)$ / $\lim_{x\to a} g(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*à déterminer*
$-\infty$	$-\infty$	*à déterminer*	$-\infty$

Limite du produit $f\times g$

$\lim_{x\to a} f(x)$ / $\lim_{x\to a} g(x)$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	*0*	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\ell\times\ell'$	$\ell\times\ell'$	*0*	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\ell\times\ell'$	$\ell\times\ell'$	*0*	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	*FI*	*FI*
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*FI*	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 3.16. — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

***Proposition 3.17* (Composition de limites, changement de variable)**
Soient I, J des parties de $\mathbb{R}$ non vides. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit a point adhérent à I. On suppose que f admet une limite en a. On pose $b = \lim_{x\to a} f(x)$. Alors b est un point adhérent à J. De plus, si g admet une limite en b, alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{x\to b} g(x)$.

Proposition 3.18. — *Soient deux fonctions f, g définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant g(x)\,.$$

On suppose que a est adhérent à I, éventuellement $a = \pm\infty$. Si f et g convergent en a vers ℓ_f et ℓ_g respectivement, on a :

$$\ell_f \leqslant \ell_g\,.$$

***Théorème 3.19* (Théorème d'encadrement, souvent dit « des gendarmes »)**
Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ ou $a, b = \pm\infty$. Alors :

$$\begin{cases} g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \text{ pour tout } x \in I \\ \\ \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b \end{cases} \implies \lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$

Exemple 3.20. — On peut montrer à l'aide de considérations géométriques que, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \tan x\,.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

et par imparité de sin sur

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

On dispose d'une notion d'asymptote.

Définition 3.21. — Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote au graphe de f en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0\,.$$

On définit de même les asymptotes en $-\infty$.

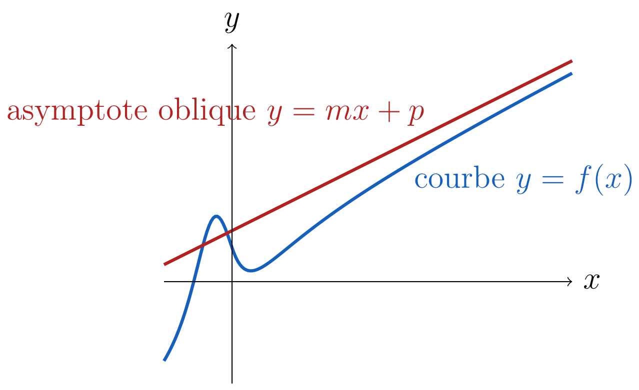


FIGURE 3. Courbe représentative d'une fonction f et de son asymptote oblique en $+\infty$.

Exemple 3.22. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. Montrer que le graphe de f admet des asymptotes en $\pm\infty$.

3.2. Quelques limites classiques

3.2.1. Limites des fonctions monotones. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Proposition 3.23. — *Soit f une fonction monotone sur I. Alors, f admet en tout point intérieur de I des limites à droite et à gauche. Elle admet aussi une limite (éventuellement infinie) à l'extrémité gauche et une limite (éventuellement infinie) à l'extrémité droite.*

Démonstration. — Considérons le cas où f est croissante et examinons seulement le cas d'un point intérieur a. Montrons que f admet une limite à gauche en a. On pose :

$$A = \{f(x)\,, \quad x \in I \quad \text{et} \quad x < a\}\,.$$

A est une partie non vide et majorée par $f(a)$ (car f est croissante). Notons S la borne supérieure de A. On a, pour tout $x \in I \cap]-\infty, a[$, $f(x) \leqslant S$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_0 \in I \cap]-\infty, a[$ tel que $f(x_0) \geqslant S - \varepsilon$. Par monotonie, on en déduit que pour tout $x \in]x_0, a[$,

$$S \geqslant f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant S - \varepsilon\,.$$

On a donc montré que f admet une imite à gauche en a et elle vaut S.

On montre de la même façon que f admet une limite à droite en considérant une borne inférieure. □

3.2.2. Quelques exemples. —

Proposition 3.24. — *Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$:*

1. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ *si n est pair,* $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ *si n est impair.*
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Proposition 3.25. — *Soit f une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, si le coefficient dominant de f est positif,*

i. *f tend vers $+\infty$ en $+\infty$,*

ii. *f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si le degré de f est pair,*

iii. *f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si le degré de f est impair.*

Proposition 3.26. — *Soit f et g des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas et on pose $h = \frac{f}{g}$. On note a_f et a_g les coefficients dominants de f et g. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

i. *Si* $\deg(f) < \deg(g)$, *alors h tend vers 0 en $\pm\infty$.*

ii. *Si* $\deg(f) \geqslant \deg(g)$ *et* $a_f a_g > 0$, *alors h tend vers $+\infty$ en $+\infty$.*

iii. *Si* $\deg(f) \geqslant \deg(g)$, $a_f a_g > 0$ *et* $\deg(g) - \deg(f)$ *est pair, alors h tend vers $+\infty$ en $-\infty$.*

iv. *Si* $\deg(f) \geqslant \deg(g)$, $a_f a_g > 0$ *et* $\deg(g) - \deg(f)$ *est impair, alors h tend vers $-\infty$ en $-\infty$.*

Proposition 3.27. — *On a :* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

De plus, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Démonstration. — La fonction ln possède une limite finie ou infinie en $+\infty$ car elle est croissante. Montrons que f n'est majorée. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\ln(2^n) = n\ln(2)$. Comme $2 > 1$, on a $\ln(2) > 0$ et donc f n'est pas majorée. Comme elle est croissante, on en déduit qu'elle tend vers $+\infty$. L'autre limite se déduit aisément. □

Les limites suivantes doivent être connues. Nous établirons certaines d'entre elles dans le chapitre sur la dérivabilité.

Proposition 3.28 **(Exponentielle, logarithme népérien et puissances)**

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)\,.$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0\,.$$

3.3. Exercices

Exercice 72

Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes, par factorisation du terme dominant.

$$x^3 - 8x^2 + 10\,, \quad \frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}\,, \quad \frac{x-\sqrt{x}}{x+3}\,, \quad \frac{\sqrt{2x^2-3x+1}}{x}\,.$$

Exercice 73

Calculer les limites en $x = 1$ des fonctions suivantes, par factorisation et simplification.

$$\frac{x^2-4x+3}{x-1}\,, \quad \frac{x^2+x-2}{2x^2+4x-6}\,.$$

Exercice 74

Soit $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, -2 et 2.

Exercice 75

Calculer les limites suivantes en utilisant l'expression conjuguée :

$$\lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\,, \quad \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}\,.$$

Exercice 76

Calculer les limites $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}(e^x + \ln(x))$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+e^x}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2e^x}$.

Exercice 77

Calculer les limites suivantes par changement de variable :

1- $\lim_{x\to2^+} \frac{x^2-2x-10}{2-x}$. Poser $y = 2 - x$.

2- $\lim_{x\to2^+} \sqrt{\frac{x^2-2x-10}{2-x}}$. Poser $y = \dfrac{x^2-2x-10}{2-x}$.

3- $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$. Poser $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Exercice 78

Soit $f : x \in [0, +\infty[\mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 3\sqrt{x}\cos(x)}{3x+2}$. On veut montrer l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$.

1- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

2- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$.

3- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{3}x = -\frac{11}{9}$.

4- Conclure.

Exercice 79

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$.

1- Déterminer le domaine de définition de f.

2- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

3- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 1$.

4- En déduire l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

CHAPITRE 4

CONTINUITÉ

4.1. Définitions et propriétés

4.1.1. Généralités. — Soit I une partie de $\mathbb{R}$ non vide et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Définition 4.1. — On dit que f est continue en a si f admet une limite ℓ en a. Plus précisément, cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, (x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\ .$$

On note que, nécessairement, $\ell = f(a)$.

Exemple 4.2. — Montrer que $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est continue en 1.

Exemple 4.3. — Montrer que si f est continue en a, alors $|f|$ l'est aussi.

Définition 4.4. — On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en a si f admet une limite à droite (resp. à gauche) en a. Cette limite vaut $f(a)$.

Proposition 4.5. — *f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.*

Exemple 4.6. — On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que f n'est pas continue en 0. Montrer qu'elle admet une limite à droite et à gauche en 0.

Proposition 4.7. — *Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues en a est une fonction continue est a.*

Définition 4.8. — On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une fonction continue.

Exemple 4.9. — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est continue.

Exemple 4.10. — Montrer que les fonctions polynomiales sont continues.

Proposition 4.11. — *Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — Montrons-le seulement pour le sinus. On rappelle que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

En particulier (voir par exemple Proposition 4.14), $\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin(0)$. Ainsi, sin est continue en 0. Soit $a \in \mathbb{R}$. On doit examiner, pour $h \in \mathbb{R}$,

$$\sin(a+h) - \sin a\,.$$

Or, on a
$$\sin(a+h) = \sin a \cos h + \sin h \cos a\,,$$
donc
$$\sin(a+h) - \sin a = \sin a(\cos h - 1) + \cos a \sin h\,.$$
Or, on a, en conséquence de la formule de duplication (pour $\cos(h+h)$)
$$\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)\,,$$
et ainsi :
$$\sin(a+h) - \sin a = -2\sin a \sin^2(h/2) + \cos a \sin h\,.$$
En utilisant que $\lim_{u\to 0} \sin u = 0$, il vient
$$\lim_{h\to 0} \sin(a+h) - \sin a = 0\,.$$

□

4.1.2. Prolongement par continuité. —

Proposition 4.12. — *Soit I une partie de $\mathbb{R}$ non vide et a un point adhérent à I n'appartenant pas à I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite ℓ en a. On définit $\tilde{f}$ sur $I \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$ et $\tilde{f}(a) = \ell$. Alors $\tilde{f}$ est continue en a. La fonction $\tilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.*

Exemple 4.13. — Soit
$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$
Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

4.1.3. Opérations sur les fonctions continues. —

Proposition 4.14. — *Soient f, g et h trois fonctions de I vers $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en a, alors $f+g$, fg et λg sont continues en a. Si $f(a) \neq 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \neq 0$ et la fonction $]a-\eta, a+\eta[\cap I \ni x \mapsto \frac{1}{f(x)} \in \mathbb{R}$ est continue en a.*

Proposition 4.15. — *Soient I, J des parties de $\mathbb{R}$ non vides. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que f est continue en a. On pose $b = f(a)$. Si g est continue en b, alors $g \circ f$ est continue en a.*

4.2. Valeurs intermédiaires et théorème du maximum

4.2.1. Valeurs intermédiaires. —

***Théorème 4.16* (Valeurs intermédiaires).** — *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. — Soient $c, d \in f(I)$ avec $c \leqslant d$. On écrit $c = f(a)$ et $d = f(b)$. Supposons que $a \leqslant b$. Soit $y \in [c,d]$. Montrons qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $y = f(x_0)$. On pose :
$$A = \{x \in [a,b] : f(x) \leqslant y\}\,.$$
A est non vide car $a \in A$ et A est majorée. Soit x_0 la borne supérieure de A. On a $x_0 \in [a,b]$. Montrons que $f(x_0) \leqslant y$. Soit $n \geqslant 0$. Il existe $a_n \in A$ tel que
$$x_0 - \frac{1}{1+n} \leqslant a_n \leqslant x_0\,.$$
On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0. On a alors $f(a_n) \leqslant y$ et donc $f(x_0) \leqslant y$.

Il faut montrer que $f(x_0) \geqslant y$. Si $x_0 = b$, il n'y a rien à faire. Sinon on a $x_0 < b$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $x_0 + \frac{1}{n+1} \in [a,b] \subset I$. On a $f\left(x_0 + \frac{1}{n+1}\right) > y$. En passant à la limite, on en déduit que $f(x_0) \geqslant y$.

Par conséquent, $f(x_0) = y$.

On traite le cas $b \leqslant a$ de façon analogue en faisant intervenir une borne inférieure. On en déduit que $f(I)$ est un intervalle.

$\square$

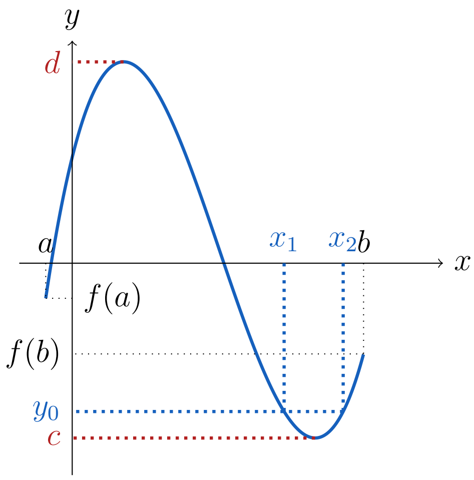


FIGURE 1. Courbe représentative d'une fonction continue f sur $[a,b]$. On a $f([a,b]) = [c,d]$ et tout $\boxed{y_0 \in [c,d]}$ admet au moins un antécédent (deux sur la figure, $\boxed{x_1 \text{ et } x_2}$).

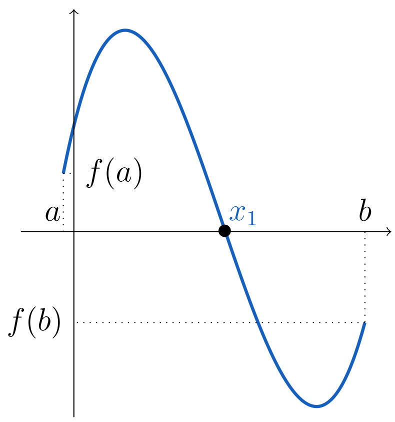


FIGURE 2. Courbe représentative d'une fonction continue f sur $[a,b]$. On a $f(a)f(b) < 0$, donc f s'annule au moins une fois sur $]a,b[$, en $\boxed{x_1}$ dans notre cas.

4.2.2. Théorème du maximum. —

***Théorème 4.17* (Théorème du maximum).** — *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $I = [a,b]$. Si f est continue sur I, alors f est bornée et atteint ses bornes. De plus,*

$$f(I) = \left[\min_{x \in I} f(x), \max_{x \in I} f(x)\right].$$

Démonstration. — En vertu du Théorème 4.16, on a :

$$\left]\inf_{x \in I} f(x), \sup_{x \in I} f(x)\right[\subset f(I).$$

Il s'agit juste de montrer que f admet un maximum et un minimum sur I. Montrons par exemple qu'elle a un maximum (pour le minimum on utilise la fonction continue $-f$). Montrons que $\sup_I f < +\infty$. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$. Par le Théorème 2.97, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x \circ \varphi$ converge vers α. Le lecteur peut facilement vérifier que $f \circ x \circ \varphi$ tend encore $+\infty$. Mais, par continuité de f elle converge aussi vers $f(\alpha)$. C'est contradictoire. On a donc montré que $\sup_I f < +\infty$. On montre que le supremum est atteint par un argument similaire, en considérant une suite d'éléments de I telle que $(f(x_n))$ tend vers $\sup_I f$. □

4.3. Réciproque des fonctions continues et strictement monotones

4.3.1. Fonctions continues et strictement monotones. —

Lemme 4.18. — *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ouvert. Soit $J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$. Supposons que f est continue et bijective. Alors J est un intervalle ouvert et f est strictement monotone. De plus, f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f.*

Démonstration. — Comme f est subjective, on a $f(I) = J$ et J est donc un intervalle. Montrons que f est monotone. Pour cela on raisonne par l'absurde. On suppose que f n'est pas monotone. Il existe, par exemple, $x < y < z$ trois éléments de I tels que $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$. Soit $b \in]f(x), f(y)[$. Par le théorème des valeurs intérmédiaires, il existe $a \in [x, y]$ tel que $b = f(a)$. On a $a \neq x$ et $a \neq y$ d'où $a \in]x, y[$. De même il existe $a' \in]y, z[$ tel que $f(a') = b$. Ainsi, pour $a \neq a'$, $f(a) = f(a')$ et f n'est pas injective. On a donc montré que f est monotone. L'injectivité implique alors la stricte monotonie.

Montrons que J est ouvert. Supposons sans perte de généralité que f est strictement croissante. Supposons que J est majoré et notons b son extrémité supérieure. Si $b \in J$, il existe $a \in I$ tel que $b = f(a)$. I étant un intervalle ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\subset I$. Soit $a' \in]a, a + \eta[$. On a $f(a') > f(a) = b$. Cela contredit la définition de b. Ainsi b n'est pas dans I. On raisonne de même avec l'extrémité inférieure. □

Proposition 4.19. — *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ouvert. Soit $J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$. Supposons que f est continue et bijective. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue.*

Démonstration. — On applique le Lemme 4.18. J est un intervalle ouvert et on peut supposer que f est strictement croissante (et f^{-1} aussi). Soit $b \in J$ et $\varepsilon > 0$. On écrit $b = f(a)$ avec $a \in I$. Il existe $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon[$ tel que $[a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0] \subset I$. On a, par le théorème des valeurs intermédiaires, $[f(a - \varepsilon_0), f(a + \varepsilon_0)] \subset J$. On a aussi $f(a - \varepsilon_0) < b < f(a + \varepsilon_0)$. Alors, pour tout $y \in]f(a - \varepsilon_0), f(a + \varepsilon_0)[$, on a :

$$a - \varepsilon \leqslant a - \varepsilon_0 \leqslant f^{-1}(y) \leqslant a + \varepsilon_0 \leqslant a + \varepsilon\,.$$

La conclusion s'ensuit aisément. □

Théorème 4.20 **(Théorème de la bijection continue)**
Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement croissante. Alors, on a

$$f(I) =]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[=]c, d[$$

et $\tilde{f} : I \to f(I) =]c, d[$ est une bijection. De plus, $\tilde{f}^{-1}$ est continue et strictement croissante. La limite de $\tilde{f}^{-1}$ en c, resp. d, est a, resp. b.

Démonstration. — Traitons le cas où les limites sont finies. Soit $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $x_0 < b - \eta$ et pour tout $x \in]b-\eta, b[\cap I$, $f(x) \leqslant \lim_{x\to b^-} f(x) + \varepsilon$. en particulier, on a $f(x_0) \leqslant \lim_{x\to b^-} f(x) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, $f(x_0) \leqslant \lim_{x\to b^-} f(x)$. On traite l'autre extrémité de la même façon. On a donc

$$f(I) \subset]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[\,.$$

Soit $y_0 \in]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$. En utilisant la définition des limites, il existe $x_1, x_2 \in I$ tel que $f(x_1) \leqslant y_0 \leqslant f(x_2)$. On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires, que $y_0 \in f(I)$. □

4.3.2. Une application fondamentale : les fonctions puissances. — Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $p_n :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^n \in]0, +\infty[$. On pose, par convention, $x^0 = 1$.

Définition 4.21. — Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on pose $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. On continue de noter p_n la fonction puissance correspondante.

Proposition 4.22. — *Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. On a : $p_{n_1 n_2} = p_{n_1} \circ p_{n_2} = p_{n_2} \circ p_{n_1}$.*

Proposition 4.23. — *Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$. Alors la fonction $p_n :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^n \in]0, +\infty[$ est continue, strictement monotone et bijective. On note, pour $x > 0$, $x^{\frac{1}{n}} := p_n^{-1}(x)$ et on pose $p_{\frac{1}{n}}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.*

Proposition 4.24. — *Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ non nuls. On a*

$$p_{\frac{1}{n_1 n_2}} = p_{\frac{1}{n_1}} \circ p_{\frac{1}{n_2}} = p_{\frac{1}{n_2}} \circ p_{\frac{1}{n_1}}\,.$$

Proposition 4.25. — *Soit $x > 0$ et $n, p \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$. Alors $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{n}}$ et, si $\frac{p}{n} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{n}}$ (pour d'autres entiers $\tilde{n}, \tilde{p}$), on a :*

$$\left(x^{\frac{1}{\tilde{n}}}\right)^{\tilde{p}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p\,.$$

Cette valeur commune est notée $x^{\frac{p}{n}}$.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $(x^p)^{\frac{1}{n}}$ est l'antécédent de x^p par p_n. On calcule donc

$$\left[\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p\right]^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{pn} = \left[\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]^p = x^p\,.$$

Pour la deuxième partie de l'énoncé, on commence par écrire

$$\left(x^{\frac{1}{\tilde{n}}}\right)^{\tilde{p}} = \left(x^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{\tilde{n}}}\,,$$

puis, de même,

$$\left[\left(x^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{\tilde{n}}}\right]^n = \left[\left(x^{\tilde{p}}\right)^n\right]^{\frac{1}{\tilde{n}}} = \left[x^{p\tilde{n}}\right]^{\frac{1}{\tilde{n}}} = x^p\,,$$

et la conclusion s'ensuit. □

Définition 4.26. — Pour $q \in \mathbb{Q}$, on définit

$$p_q :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^q \in]0, +\infty[\,.$$

Proposition 4.27. — *Pour $q \in \mathbb{Q}$ et $q > 0$ (resp. $q < 0$), la fonction p_q est strictement croissante (resp. décroissante), continue et bijective.*

4.4. Exercices

Exercice 80

Soit une fonction continue f sur $[-3, 2]$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		-2		1		2
			5				1
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-2				0		

1- Déterminer les images par f des intervalles $[-2; 1]$, $[-2, 2]$, $[-3, 1]$.

2- Combien de solutions a l'équation $f(x) = 0$ et l'équation $f(x) = 2$?

Exercice 81

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en a. Soit les applications $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ qui à tout réel x associe le minimum entre $f(x)$ et $g(x)$ (respectivement le maximum). Montrer que ces fonctions sont continues. On pourra montrer que $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Exercice 82

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = [x]$, avec $[x]$ représentant la partie entière de x.

Exercice 83

Soit $P(x) = 6x^3 - 8x^2 - 3x + 4$ défini sur $\mathbb{R}$.

1- Calculer les images de -1 ; 0 ; 1 et 2 par P. Démontrer que le polynôme admet au moins 3 racines.

2- Déterminer un intervalle d'amplitude $\dfrac{1}{2}$ pour chacune d'elles.

Exercice 84

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, il existe $x_\lambda \in [0, 1]$ tel que $f(x_\lambda) = \lambda g(x_\lambda)$.

Exercice 85

Soit la fonction $f(x) = x^{18} + x^{10}$.

1- Montrer que f est strictement croissante pour $x \geqslant 0$.

2- Soit l'équation
$$x^{18} + x^{10} = 544$$

- a- Montrer qu'elle possède une seule solution réelle positive.
- b- Déterminer un intervalle d'amplitude 1 pour cette solution.
- c- Déterminer cette racine (indication : utiliser la substitution $t = x^2$; en résulte une équation par rapport à t ; chercher sa racine qui est un nombre naturel en utilisant la factorisation de 544).

Exercice 86

Existence d'une solution

1- Soit la fonction $f(x) = \cos(2x) - x$. Montrer que cette fonction s'annule sur $[0, 1]$.

2- Soit l'équation $2x\sqrt{x^2 + 1} = x + 1$. Montrer l'existence d'une solution sur $[0, 1]$.

3- Soit l'équation $2\cos x = x$.

(a) Montrer que les solutions, si elles existent, appartiennent à l'intervalle $[-2, 2]$.

(b) Montrer l'existence d'au moins une solution.

CHAPITRE 5

DÉRIVABILITÉ

5.1. Définition et interprétation

5.1.1. Définition. —

Définition 5.1. — On dit que f est dérivable en a lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, \left(x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I \setminus \{a\} \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell \right| \leqslant \varepsilon \right)\,.$$

Un tel ℓ est unique et on le note $f'(a)$ et on l'appelle dérivée de f en a.

Comme pour la continuité, on définit la dérivabilité à droite et à gauche en un point.

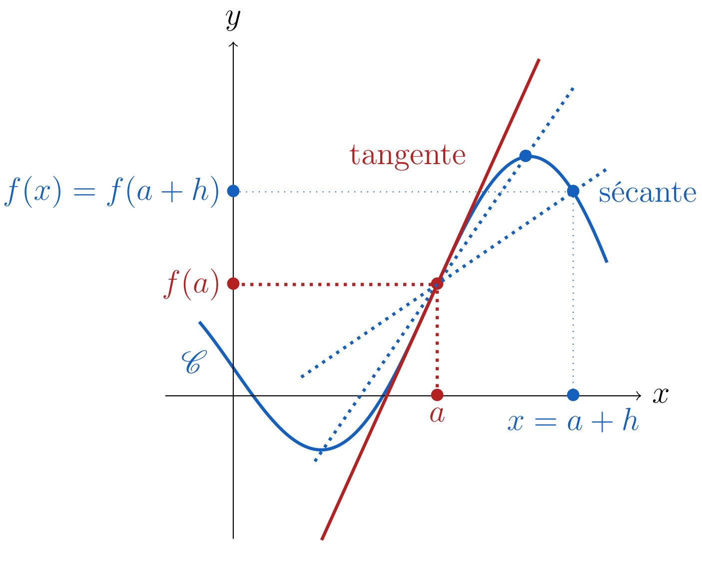


Figure 1. Courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction dérivable f en a. La tangente à $\mathscr{C}$ au point $(a, f(a))$ est obtenue comme limite des sécantes passant par les point $(a, f(a)$ et $(x, f(x))$ quand $x \to a$.

Exemple 5.2. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 5.3. — La fonction $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-1} \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemple 5.4. — La fonction $[0, +\infty[\ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$, mais pas en 0.

Proposition 5.5. — *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Définition 5.6. — Si a est intérieur à I et si f est dérivable en a, on appelle tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)\,.$$

Si a est l'extrémité gauche (resp. droite) de I, on dit dans ce cas que la demi-droite d'équation $y = f(a)+f'(a)(x-a)$, $x \geqslant a$ (resp. $x \leqslant a$) est la demi-tangente à droite (resp. gauche) au graphe de f en $(a, f(a))$.

Définition 5.7. — On suppose que a n'est pas l'extrémité droite de I. On dit que f est dérivable à droite en a lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R} \left(x \in]a, a+\eta[\cap I \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell \right| \leqslant \varepsilon \right)\,.$$

Un tel ℓ est unique et on le note $f'_d(a)$ et on l'appelle dérivée de f à droite en a. La demi-droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a)(x-a)$, $x \geqslant a$ (resp. $x \leqslant a$) est, par définition, la demi-tangente à droite au graphe de f en $(a, f(a))$.

On définit la dérivabilité à gauche en a d'une façon analogue.

Définition 5.8. — On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{C}(I)$. Si $\mathcal{D}'(f)$ est l'ensemble des points de I où est f est dérivable, la fonction $\mathcal{D}'(f) \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ est appelée fonction dérivée de f.

Définition 5.9. — On dit que f est continuement dérivable sur I quand f est dérivable en tout point de I et quand sa dérivée f' est continue sur I. On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continuement dérivables sur I. Plus généralement, on note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k-fois dérivables sur I à dérivées continues sur I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensenble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

5.1.2. Propriétés. —

Proposition 5.10. — *Les assertions suivantes sont vraies.*

i. *Si f est dérivable en a, alors f est dérivable à droite et à gauche en a*
ii. *Si f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$, alors f est dérivable en a.*

Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition 5.11. — *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en a, alors $f+g$, fg et λf sont dérivables en a, de dérivée respectives $f'(a)+g'(a)$, $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ et $\lambda f'(a)$.*

Proposition 5.12. — *Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On pose $b = f(a)$. Il existe $\eta \in]0, \varepsilon[$ tel que, pour tout $y \in]b-\eta, b+\eta[\cap J$, $y \neq b$, on a

$$\left| \frac{g(y)-g(b)}{y-b} - g'(b) \right| \leqslant \varepsilon\,,$$

ou encore, pour tout $y \in]b-\eta, b+\eta[\cap J$,

$$|g(y) - g(b) - g'(b)(y-b)| \leqslant \varepsilon |y-b|\,,$$

On a aussi l'existence de $\eta' \in]0,\varepsilon[$ tel que $|\eta' f'(a)| < \frac{\eta}{2}$ et pour tout $x \in]a-\eta', a+\eta'[$ et $x \neq a$
$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leqslant \frac{\eta}{2}\,.$$
En particulier, on a :
$$|f(x)-f(a)| \leqslant \frac{\eta}{2}|x-a| + |f'(a)||x-a| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta\,.$$
On en déduit que :
$$|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))(f(x)-f(a))| \leqslant \varepsilon |f(x)-f(a)|\,,$$
On en tire :
$$|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))(f(x)-f(a))| \leqslant \varepsilon(|f'(a)||x-a| + \frac{1}{2}|x-a|)\,.$$
De plus, on a
$$|g'(f(a))(f(x)-f(a)) - g'(f(a))f'(a)(x-a)| \leqslant |g'(f(a))||x-a|\frac{\eta}{2}\,.$$
On en déduit, par l'inégalité triangulaire, que :
$$|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))f'(a)(x-a)| \leqslant \varepsilon|x-a|\left(|f'(a)| + \frac{1}{2} + |g'(f(a))|\right)\,,$$
et la conclusion s'ensuit par des manipulations élémentaires. □

En combinant la dérivée de la fonction inverse et la proposition précédente, on obtient la proposition suivante.

Proposition 5.13. — *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et telle que $f(a) \neq 0$. Soit $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \neq 0$. On pose*
$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I\,, \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}\,.$$
Alors, g est dérivable en a et $g'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.

En utilisant la dérivée du produit et de l'inverse, on en déduit la dérivée d'un quotient.

Proposition 5.14. — *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et telle que $f(a) \neq 0$. Soit $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \neq 0$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Alors, $\frac{g}{f}$ est dérivable en a, de dérivée*
$$\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - f(a)g'(a)}{f(a)^2}\,.$$

Proposition 5.15. — *Soit I un intervalle non vide et a un* ***point intérieur*** *à I. On suppose que a est un maximum (resp. minimum) local de f, c'est à dire que :*
$$\exists \eta > 0\,, \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\,, f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a))\,,$$
et que f est dérivable en a. Alors, on a $f'(a) = 0$.

Démonstration. — Pour $x > a$ et $x \in I$, on a :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0\,.$$
En passant à la limite (à droite), il vient $f'(a) \leqslant 0$. Par ailleurs, pour $x < a$ et $x \in I$, on a :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0\,,$$

et donc, par passage à la limite (à gauche), $f'(a) \geqslant 0$. □

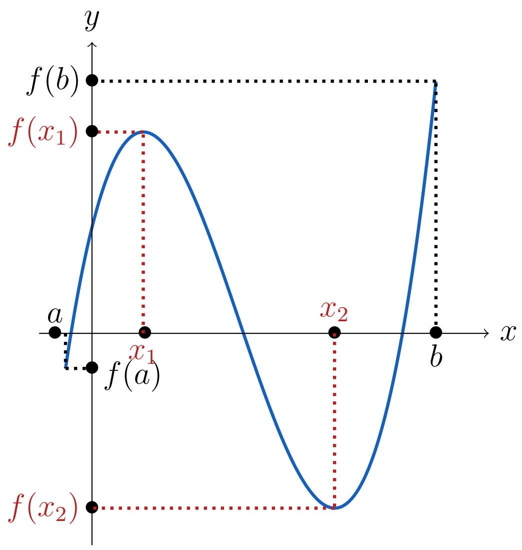


FIGURE 2. Courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[a, b]$. Le maximum de f est $f(b)$ tandis que $f(x_1)$ est un maximum local où $f'(x_1) = 0$. Le minimum de f est $f(x_2)$ où $f'(x_2) = 0$.

Une application immédiate de la notion de dérivabilité est le calcul de limites. En voici un exemple.

***Proposition 5.16* (Règle de l'Hôpital).** — *Soient f et g deux fonctions sur $[a, b]$ dérivables en $c \in [a, b]$ telles que $g'(c) \neq 0$. Alors,*

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

5.2. Dérivées de quelques fonctions usuelles

Proposition 5.17. — *La fonction* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. *Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle ouvert I non vide, alors* $\ln f$ *est dérivable sur I et de dérivée* $\frac{f'}{f}$.

Exemple 5.18. — Donner un domaine de définition pour la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et étudier sa dérivabilité.

Proposition 5.19. — *La fonction exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.

Démonstration. — Nous allons le montrer en admettant que exp est dérivable en 0 de dérivée 1 et en admettant que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, exp satisfait $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On écrit, pour $x \neq a$,

$$\frac{\exp x - \exp a}{x - a} - \exp a = \exp a \left(\frac{\exp(x - a) - 1}{x - a} - \exp(a) \right) .$$

Le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers a. Ainsi, par définition, exp est dérivable en a et $\exp'(a) = \exp(a)$. □

Proposition 5.20. — *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\cos' = -\sin , \quad \sin' = \cos .$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 4.11 et remarquer que

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = -\frac{h}{2}\sin a\frac{\sin^2(h/2)}{(h/2)^2} + \cos a\frac{\sin h}{h},$$

et d'utiliser que $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$ pour en déduire que sin est dérivable en a et $\sin'(a) = \cos a$. □

Proposition 5.21. — *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie dérivable sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors*

1. $\left[f^n\right]' = nf'f^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^\star$,
2. $\left[\cos\left(f\right)\right]' = -f'\sin\left(f\right)$,
3. $\left[\sin\left(f\right)\right]' = f'\cos\left(f\right)$,
4. *si* $f > 0$, $\left[\sqrt{f}\right]' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$,
5. $\left[e^f\right]' = f'e^f$,
6. *si* $f > 0$, $\left[\ln\left(f\right)\right]' = \frac{f'}{f}$ *(appelée la « dérivée logarithmique de f »).*

Fonction	**Dérivée**	**Ensemble**
$f(x) = \lambda$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

5.3. Accroissements finis et applications

5.3.1. Théorème de Rolle. —

Théorème 5.22 **(Théorème de Rolle).** — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. — Par le théorème du maximum, f admet un maximum et un minimum. Si ces extrema sont tous les deux atteints en a et b, alors f est constante et la conclusion s'ensuit. Sinon, soit c un extremum atteint dans $]a, b[$. On a, par la Proposition 5.15,$f'(c) = 0$. □

5.3.2. Théorème des accroissements finis. —

Théorème 5.23 **(Théorème des accroissements finis)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

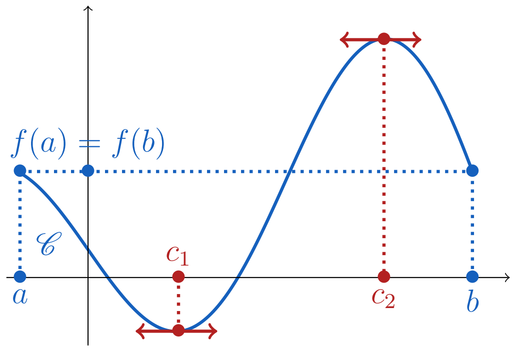


FIGURE 3. Courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction dérivable f telle que $f(a) = f(b)$. Selon le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ (ici c_1 et c_2) tel que $f'(c) = 0$, ce qui correspond à un point où la tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale.

Démonstration. — On applique le théorème de Rolle à la fonction définie par :

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

□

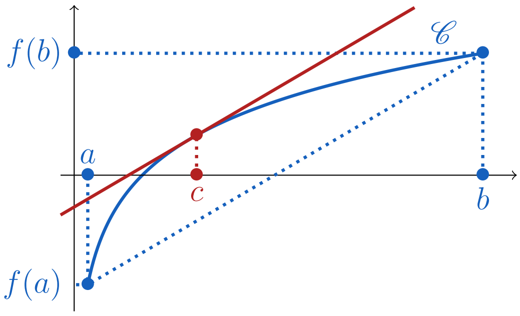


FIGURE 4. Courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction dérivable f. Selon le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse c est parallèle à la sécante passant par les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses a et b.

5.3.3. Applications : monotonie, prolongement dérivable. —

Définition 5.24. — Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Soit $K \geqslant 0$. On dit que f est K-lipschitzienne lorsque

$$\forall x, y \in A, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|.$$

Exemple 5.25. — Montrer que $\mathbb{R} \ni x \mapsto a|x| + b \in \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5.26. — Montrer que $[0, +\infty[\ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ n'est pas lipschitzienne.

Proposition 5.27. — *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne. Alors f est continue sur A.*

Proposition 5.28. — *Soit I un intervalle non vide, non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. On suppose qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant K$. Alors f est K-lipschitzienne.*

Exemple 5.29. — Montrer que $[1, +\infty[\ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Corollaire 5.30. — *Soit I un intervalle non vide, non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et de dérivée nulle. Alors f est constante.*

Exemple 5.31. — On cherche les fonctions u deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$u'' + u = 0\,.$$

Première méthode : On sait que sin et cos sont deux solutions à ce problème. On pose

$$v(\theta) = u(\theta)\sin\theta + u'(\theta)\cos\theta\,, \quad w(\theta) = u(\theta)\cos\theta - u'(\theta)\sin\theta\,.$$

En dérivant, on trouve

$$v'(\theta) = 0\,, \quad w'(\theta) = 0\,.$$

Ainsi, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$v(\theta) = b\,, \quad w(\theta) = a\,.$$

Ainsi, en résolvant un système linéaire, on a

$$u = a\cos + b\sin\ .$$

Seconde méthode : Soit u une solution. On pose $u(0) = a$ et $u'(0) = b$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(\theta) = (u(\theta) - (a\cos\theta + b\sin\theta))^2 + (u'(\theta) - (-a\sin\theta + b\cos\theta))^2\,.$$

On observe alors que $d' = 0$ et, puisque $d(0) = 0$, on a $d = 0$.

Proposition 5.32. — *Soit I un intervalle non vide, non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I croissante (resp. décroissante). Alors la dérivée de f est positive (resp. négative) sur I.*

Proposition 5.33. — *Soit I un intervalle non vide, non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et de dérivée positive (resp. strictement positive). Alors f est croissante (resp. strictement croissante).*

Exemple 5.34. — On considère la fonction $f : I =]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Cette fonction est dérivable sur I, de dérivée : $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x(x+1)^2}$. On voit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, donc f est strictement croissante sur I. Par ailleurs, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ tandis que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Le tableau suivant synthétise le signe de la dérivée et les variations de la fonction f :

x	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0

On en déduit que $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Exemple 5.35. — Donner un exemple de fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée s'annule en au moins un point.

Exemple 5.36. — Montrer que $]0, \pi] \ni x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$ est décroissante sur $]0, \pi]$.

Exemple 5.37. — Montrer que $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ni x \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ est dérivable. En déduire que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x \geqslant x$.

Exemple 5.38. — Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,.$$

***Proposition 5.39* (Prolongement dérivable).** — *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a,b[$. On suppose que f admet une limite ℓ en b et que la f' possède également une limite ℓ' en b. Alors le prolongement par continuité $\tilde{f}$ (au sens de la Proposition 4.12) de f en b est une fonction dérivable en b et $\tilde{f}'(b) = \ell'$.*

Démonstration. — Notons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f en b. Montrons que $\tilde{f}$ est dérivable en b. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $b - \eta > a$ et pour tout $x \in]b-\eta, b[$, $|f'(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in]b-\eta, b[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b)}{x-b} = \tilde{f}'(c_x) = f'(c_x)\,.$$

On a alors $|f'(c_x) - \ell'| \leqslant \varepsilon$ et la conclusion s'ensuit aisément. □

Exemple 5.40. — Montrer que la fonction de l'Exemple 4.13 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée en tout point. On pourra utiliser l'Exercice 5.38 pour appliquer le théorème du prolongement dérivable en 0.

***Proposition 5.41* (Théorème de Darboux).** — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est à dire : si $c_1, c_2 \in f'(]a,b[)$, alors $[c_1,c_2] \subset f'(]a,b[)$.*

5.4. Dérivabilité des fonctions réciproques

Proposition 5.42. — *Soit $I =]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I et telle que $f' > 0$ sur I. Alors $f(I) = J$ est un intervalle ouvert, f est strictement croissante et $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur J et, pour tout $y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.*

Démonstration. — La fonction f est strictement croissante. On rappelle la Proposition 4.19 relative à la continuité de la réciproque. Soit $b \in J$. Il existe un unique $a \in I$ tel que $b = f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in (0, f'(a))$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[(\subset I)$,

$$|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| \leqslant \varepsilon |x-a|\,.$$

On sait que f^{-1} est continue en b. Il existe donc $\eta' > 0$ tel que, pour tout $y \in]b-\eta', b+\eta'[(\subset J)$,

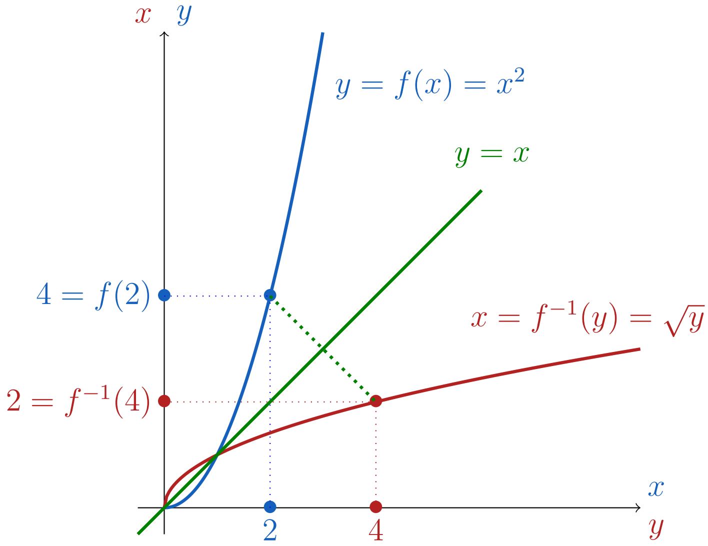
$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \eta\,,$$

si bien que :

$$|y - b - (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))f'(a)| \leqslant \varepsilon |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| \leqslant \varepsilon\eta \leqslant \varepsilon f'(a)\,.$$

Il reste à diviser par $f'(a)$ et la conclusion s'ensuit. □

Exemple 5.43. — La fonction $f : x \in]0,+\infty[\mapsto f(x) = x^2$ est dérivable sur $I =]0,+\infty[$ et pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2x > 0$. La fonction f est donc une bijection de $I =]0,+\infty[$ sur $J =]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]0,+\infty[$. La bijection réciproque $f^{-1} : y \in J \mapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ est dérivable sur J et pour tout $y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{2x}$ où $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, donc $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.



5.5. Études de quelques fonctions usuelles

Les exemples qui suivent pourront être traités en exercices.

5.5.1. Les fonctions du second degré. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction du second degré définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. Supposons que $a > 0$.

Proposition 5.44. — *f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc continue sur $\mathbb{R}$), strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{b}{2a}[$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$. Son unique minimum est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et il vaut $c - \frac{b^2}{4a^2}$.*

5.5.2. Les fonctions logarithme et exponentielle. — On rappelle que le logarithme népérien est défini par :

$$\forall x > 0 \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} \mathrm{d}u\,.$$

Nous montrerons plus tard que, comme $]0, +\infty[\ni u \mapsto \frac{1}{u} \in \mathbb{R}$ est continue, ln est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et de dérivée $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x > 0$. La fonction ln est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle est aussi continue car dérivable. On observe que $\ln(1) = 0$.

Proposition 5.45. — *Pour tout $x, y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.*

Démonstration. — Soit $y > 0$ et, pour $x > 0$, $f_y(x) = \ln(xy)$. Par composition, f_y est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_y'(x) = \frac{1}{x} = \ln'(x)$. Il : s'ensuite que $f_y - \ln$ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Pour tout $y > 0$, il existe donc $c_y \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + c_y$. La fonction $c(\cdot) = \ln(x\cdot) - \ln(\cdot)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $c'(y) = \frac{1}{y}$ si bien qu'il existe une constante a telle que, pour tout $y > 0$, $c(y) = \ln(y) + a$. On a $a = c(1) = 0$. □

La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, étant continue et strictement croissante (de limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, par la Proposition 3.27), elle est une bijection. Sa bijection réciproque est $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Elle est dérivable par la Proposition 5.42 et sa dérivée vaut, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\exp'(y) = \frac{1}{\ln'(\exp(y))} = \exp(y)$. La fonction exp est strictement croissante et $\lim_{x\to-\infty} \exp = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

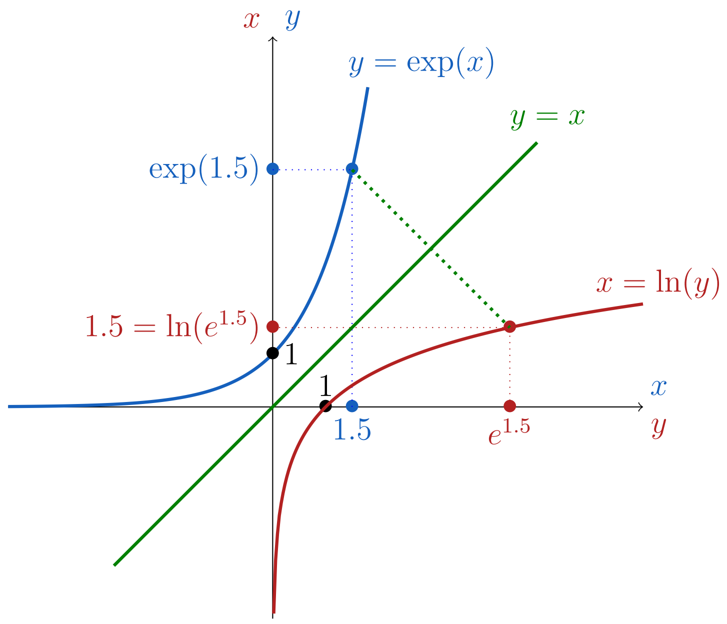


FIGURE 5. Courbes représentatives des fonctions exp et ln.

Proposition 5.46. — *On a, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la Proposition 5.45. □

Proposition 5.47. — *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dérivable en* 0 *de dérivée* $f'(0) = 1$ *et satisfait, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$, *alors* $f = \exp$.

Démonstration. — Il est facile de voir que $f(0)^2 = f(0)$ et que si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle. On a donc $f(0) = 1$. Par la preuve de la Proposition 5.19, on obtient que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$. Si on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)\exp(-x)$, on en déduit facilement que $g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. g est donc constante égale à $g(0) = 1$. □

Lemme 5.48. — *On a* $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$.

Démonstration. — On définit, pour $x > 0$, $f(x) = x \ln x$. On a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$. Sur $]-\infty, e[$, la dérivée est strictement négative et donc f y est strictement décroissante ; f possède donc une limite finie ou $-\infty$ en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^{-n}$ (u tend vers 0 par valeurs supérieures). Par la caractérisation séquentielle de la limite, on sait que $(f(u_n))$ tend vers la limite de f en 0. Or, on a, $f(u_n) = -n2^{-n} \ln 2$. Il est aisé de montrer que cette suite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. □

Définition 5.49. — Pour $a, x > 0$, on pose : $x^a = \exp(a \ln(x))$.

Proposition 5.50. — *On a, pour tout* $a > 0$: $\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0$.

Démonstration. — Par définition, on a

$$x^a e^{-x} = e^{-x+a\ln x} = e^{x(-1-ax^{-1}\ln x^{-1})}.$$

On conclut grâce au Lemme 5.48 et une composition de limites. □

Proposition 5.51. — *Soit* $a > 0$ *et* $f :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^a \in]0, +\infty[$. f *est strictement croissante et dérivable de dérivée* $f'(x) = ax^{a-1}$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la Proposition 5.12. □

Proposition 5.52. — *On a, pour tout* $\alpha > 0$: $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$.

Proposition 5.53. — *Soit* $a > 0$, $a \neq 1$. *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *la fonction* $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $(a^x)' = \ln(a)a^x$. *Elle est strictement monotone, de sens donné par le signe de* $\ln(a)$ *:*

x	$-\infty$		$+\infty$
variations de a^x *quand* $a > 1$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
variations de a^x *quand* $0 < a < 1$	$+\infty$	$\searrow$	0

2. *la fonction* $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0, +\infty[$ *;*
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $a^{x+y} = a^x \times a^y$ *;*
4. $a^0 = 1$ *;*
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$ *;*
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ *;*
7. *pour tout réel* $b > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(ab)^x = a^x \times b^x$.
8. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(a^x)^y = a^{xy}$.

5.5.3. Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques. — On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La proposition suivante se déduit aisément des propriétés de l'exponentielle.

Proposition 5.54. — *La fonction* cosh *est paire et la fonction* sinh *est impaire. Elles sont toutes deux dérivables sur* $\mathbb{R}$ *de dérivées* $\cosh' = \sinh$ *et* $\sinh' = \cosh$. *La fonction* sinh *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et la fonction* cosh *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$. *On a*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty\,.$$

Définition 5.55. — On définit argcosh comme la fonction réciproque de cosh : $[0, +\infty[\to [1, +\infty[$ et argsinh la bijection récriproque de sinh.

Proposition 5.56. — *On a :*

$$\forall x \geqslant 1\,, \operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\,,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,.$$

De plus, pour $x > 1$, $\operatorname{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ *et pour* $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Démonstration. — Examinons le cas de argsinh. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sinh(x)$. On sait déjà qu'un tel x est unique. On a donc :

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

Cela est équivalent à :

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0\,.$$

On pose $X = e^x$ et on veut résoudre :

$$X^2 - 2yX - 1 = 0\,.$$

Le discriminant est $\Delta = 4(y^2+1) > 0$. La seule racine positive est :

$$X_1 = y + \sqrt{1+y^2}\,.$$

La conclusion s'ensuit de manière élémentaire. On traite de même argcosh. □

5.5.4. Les fonctions sinus et cosinus. — On a déjà vu que les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, de période 2π et que $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$. On rappelle aussi l'Exemple 10.26.

Proposition 5.57. — *La fonction* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ *est une bijection strictement croissante. Sa bijection réciproque est notée* arcsin *et elle est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée :*

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Démonstration. — On sait déjà que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$. Il s'agit de montrer que cos ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; cela peut être montré en considérant l'Exemple 10.26. Par continuité et du fait que $\cos(0) > 0$, on en déduit que $\cos > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le reste de la preuve est une conséquence de la Proposition 5.42. □

La proposition suivante s'établit d'une façon analogue.

Proposition 5.58. — *La fonction* $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *est une bijection strictement décroissante. Sa bijection réciproque est notée* arccos *et elle est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée :*

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

5.5.5. La fonction tangente. —

Proposition 5.59. — *La fonction* $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *est une bijection strictement croissante et dérivable, dont la dérivée vaut* $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ *pour tout* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*. Sa bijection réciproque est notée* $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*, elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. — Il s'agit de dériver un quotient et de dériver une bijection réciproque. □

5.6. Exercices

Exercice 87

1- Montrer que la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable en tout réel x_0 et que $f'(x_0) = 3x_0^2$. On pourra montrer que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2- Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel $x_0 > 0$ et que $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. On pourra penser à utiliser l'expression conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

3- Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais non dérivable.

4- Calculer l'équation de la tangente (T_2) à la courbe d'équation $y = x^3 - x^2 - x$ au point d'abscisse $x = 2$. Calculer a afin que la tangente (T_a) au point $x = a$ soit parallèle à (T_2).

5- Montrer que si une fonction f est paire et dérivable, alors f' est une fonction impaire.

Exercice 88

Les fonctions suivantes prolongées par continuité en 0 sont-elles dérivables en 0 et le cas échéant deux fois dérivable en 0 ?

1. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0,$
2. $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$

Exercice 89

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on pourra donner le domaine de dérivabilité) :

1- $x \mapsto x^2 e^x$ et $x \mapsto x^2(1+x)^5$

2- $x \mapsto (2x^2 + \sqrt{x} + 1)e^x$ et $x \mapsto \ln|x|$

3- $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ et $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$

4- $x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ et $x \mapsto x^{n-1} \ln x$

5- $x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$ et $x \mapsto \sqrt{x} \ln x$

6- $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et $x \mapsto (2x^3 + \sqrt{x^2+1} + 1)^2$

7- $x \mapsto \ln(x^2-1)$ et $x \mapsto e^{x^2}$

8- $x \mapsto \tan(x/2)$ et $x \mapsto \tan^2(x/2)$

Exercice 90

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x} \quad \text{pour} \quad x > 0 \qquad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

1- Calculer la limite de f en $+\infty$.

2- Calculer la limite de f en 0.

3- Montrer que la fonction f est continue en 0.

4- Montrer que la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$.

5- Montrer que f est dérivable en 0.

6- Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

7- La fonction f' est-elle continue sur $[0; +\infty[$?

Exercice 91

Etudier la fonction $f(x) = x^5 - 5x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles distinctes.

Exercice 92

Calculer les limites suivantes quand x tend vers 0 : a. $\dfrac{\sin 2x}{x}$ b. $\dfrac{x - \sin x}{x}$ c. $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

Exercice 93

Soit $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$. Étudier la fonction f. Tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un maximum local.

Exercice 94

Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $[-1, 1]$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 95

On se place dans le plan muni du repère canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère $A = (0, a)$ et $B = (c, -b)$, avec a, b, c strictement positifs. Un problème physique très ancien est de savoir quel trajet un rayon lumineux partant de A et arrivant en B en traversant un interface $y = 0$ entre deux milieux homogènes. On considère aussi deux réels $n_1 \geqslant 1$ et $n_2 \geqslant 1$ qui représentent les indices de réfraction des deux milieux.

Notons $M = (x, 0)$ (avec $x \in [0, c]$) un point de l'interface où le rayon passe possiblement d'un milieu à l'autre.

Le principe de Fermat, concernant la propagation des rayons lumineux, nous dit que le point M doit rendre minimale la quantité

$$C(M) = n_1 AM + n_2 BM\,.$$

1- Exprimer $C(M)$ en fonction de x. On notera $C(M) = f(x)$.

2- Justifier que f est dérivable sur $[0, c]$. Calculer la dérivée de f. Que valent $f'(0)$ et $f'(c)$?

3- Déterminer le minimum x_0 sur le segment $[0, c]$ de f. On note $M_0 = (x_0, 0)$.

4- On note $i_1 \in [0, \pi/2]$ l'angle entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{M_0A}$. On note $i_2 \in [0, \pi/2]$ l'angle entre $-\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{M_0B}$. Établir que

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2\,.$$

Cette relation est appelée loi de Snell-Descartes.

Exercice 96

En première approximation la Terre et Mars décrivent des trajectoires circulaires autour du Soleil.

On note a_T la distance entre la Terre et le Soleil, et a_M la distance entre Mars et le Soleil. Mars fait un tour autour du Soleil en 687 jours.

La position de la Terre est déterminée, dans un repère orthonormé centré sur le Soleil, par les deux coordonnées suivantes :

$$x_T(t) = a_T \cos(t/P_T)\,, \quad y_T(t) = a_T \sin(t/P_T)\,.$$

De même, pour Mars,

$$x_M(t) = a_M \cos(t/P_M)\,, \quad y_M(t) = a_M \sin(t/P_M)\,.$$

À l'instant t, la distance entre la Terre et Mars est donnée par la fonction

$$d(t) = \sqrt{(x_M(t) - x_T(t))^2 + (y_M(t) - y_T(t))^2}\,.$$

Déterminer les minimas de d.

Le 30 mai 2016, la distance entre la Terre et Mars était minimale. Donner approximativement trois dates (au mois près) où cette distance a été ou sera à nouveau minimale.

Exercice 97

1. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement $10 + \frac{1}{22} < \sqrt{101} < 10 + \frac{1}{20}$.
2. Soit $f(x) = e^x$. Que donne l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$?

Exercice 98

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre "c" de $]a, b[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 99

Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que :

1- $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout réel x.

2- $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout réel $x > 0$.

3- $|\sin x| \leqslant x$ pour tout réel x.

4- Montrer que pour tout réel positif x, on a $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 100

1- La fonction $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \ln |x| \in \mathbb{R}$ est-elle dérivable sur son domaine de définition ?

2- On considère l'expression

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| .$$

Montrer qu'elle permet de définir une application f (dont on précisera le domaine de départ et le domaine d'arrivée).

3- Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 101

On pose $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in D\,, \quad f(x) = \frac{2x}{3x-1}\,.$$

1- Déterminer $f(D)$.

2- La fonction f est-elle injective ?

3- On considère $g : D \ni x \mapsto f(x) \in f(D)$. Expliquer pourquoi g est bijective et expliciter sa réciproque.

4- Esquisser les graphes de g et g^{-1} sur un même dessin.

Exercice 102

On pose $I =]-3, +\infty[$ et on considère $I \ni x \mapsto f(x) = 5 - 12x - 2x^2 \in \mathbb{R}$.

1- Montrer que f est strictement décroissante et réalise une bijection sur son image (bijection qu'on appellera encore f). Donner la bijection réciproque.

2- Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un même dessin.

Exercice 103

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1- a- Établir que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b).$$

b- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

2- a- Montrer que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection et donner l'expression explicite de sa bijection réciproque, notée argsh.

b- Calculer la dérivée de argsh.

c- La fonction $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective, injective ?

d- On considère maintenant $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$. Montrer que la fonction est bien définie et qu'il s'agit d'une bijection dont on calculera la réciproque, notée argch.

e- Calculer la dérivée de argch.

Exercice 104

Trouver des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\arctan(x) \neq \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$

Exercice 105

Simplifier les expressions suivantes :

1- $\sin(\arcsin(x))$, pour $x \in \mathbb{R}$,

2- $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

3- $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in [\pi, 3\pi]$,

4- $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in [3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}]$,

5- $\cos(\arcsin(x))$,

6- $\sin(\arctan(x))$.

Exercice 106

Donner le domaine où les fonctions suivantes sont définies et dérivables et déterminer la dérivée sur ce domaine :

$$(a)\ f_1(x) = \frac{x}{\ln(x)} + \arcsin(x^2);\ (b)\ \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right);\ (c)\ \arccos(2x^2-1).$$

Exercice 107

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

1- a- Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\, ! u_n \in \mathbb{R}, \quad f_n(u_n) = 0.$$

b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.

2- a- Calculer $f_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n.

b- En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3- a- Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[0, 1]$.

b- Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\ell = 0$.

Exercice 108

On définit la fonction $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ par $f(x) = x \exp(x)$, pour tout $x > 0$.

1- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique $u_n \in]0, +\infty[$ tel que $f(u_n) = n$.

2- Étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

CHAPITRE 6

INTÉGRATION

Soit $I = [a, b]$ avec $a < b$.

6.1. Intégrale des fonctions en escalier

Définition 6.1. — On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe une subdivision de $[a, b]$, $s_0 = a < s_1 < \ldots < s_n = b$ telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, f est constante sur $]s_i, s_{i+1}[$. On dit dans ce cas que s est une subdivision adaptée à f.

On observera qu'une telle subdivision n'est pas unique.

Exemple 6.2. — Toute fonction constante est en escalier.

Définition 6.3. — Si $s = (s_j)_{j=0,\ldots,n}$ est une subdivision de $[a, b]$ et $c \in [a, b]$, on note $s \cup \{c\}$ la subdivision s si $c = s_k$ pour un certain k. Sinon, on note k l'unique entier tel que $c \in]s_k, s_{k+1}[$ et $s \cup \{c\}$ désigne la subdivision s' définie par $s'_j = s_j$ pour $j \leqslant k$ $s'_{k+1} = c$ et $s'_j = s_{j+1}$ pour $j \geqslant k+1$. On définit alors par récurrence la réunion de deux subdivisions $s \cup s'$ et on a $s' \cup s = s \cup s'$.

Proposition 6.4. — *La réunion d'une subdivision adaptée à une fonction en escalier f avec une subdivision quelconque est encore adpatée à f.*

Démonstration. — La preuve se fait par récurrence. Il suffit de voir que l'ajout d'un point à une subdivision adaptée en fait une subdivision adpatée. □

Proposition 6.5. — *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est en escalier.*

Définition 6.6. — Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier et s une subdivision adaptée à f. On pose :

$$I(f, s) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) f\left(\frac{s_i + s_{i+1}}{2}\right).$$

Proposition 6.7. — *Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier. Si s et s' sont deux subdivisions adaptées à f, on a $I(f, s) = I(f, s')$. Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur $[a, b]$ et est notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ou encore $\int_a^b f$.*

Démonstration. — On note $s'' = s \cup s'$. C'est encore une subdivision adaptée. Il suffit de montrer que, pour $c \in [a, b]$, $I(f, s) = I(f, s \cup \{c\})$. Il s'ensuivra alors par récurrence que $I(f, s) = I(f, s'')$ et, comme $s'' = s' \cup s$, on a aussi $I(f, s') = I(f, s'')$. □

Exemple 6.8. — Si f est constante égale à c, alors $\int_a^b f = c(b - a)$.

Proposition 6.9. — *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$. Si $f \leqslant g$, on a $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

Démonstration. — Il suffit de considérer une subdivision adpatée simultanément à f et g, en prenant la réunion d'une subdivision adaptée à f et d'une subdivision adaptée à g. □

Proposition 6.10. — *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier et $c \in [a,b]$. On a : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

6.2. Intégrale des fonctions continues

Nous savons maintenant calculer l'intégrale des fonctions en escaliers. Expliquons comment en déduire une définition de l'intégrale d'une fonction continue.

6.2.1. Définition de l'intégrale. — Les fonctions continues sont approchables uniformément par les fonctions en escalier.

Proposition 6.11. — *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, notées E_1 et E_2, telle que*

$$\forall x \in [a,b]\,, E_1(x) \leqslant f(x) \leqslant E_1(x) + \varepsilon\,,$$

et

$$\forall x \in [a,b]\,, E_2(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant E_2(x)\,.$$

Définition 6.12. — Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On pose

$$I_+(f) = \sup_{\substack{E \text{ escalier} \\ E \leqslant f}} \int_a^b E\,, \qquad I_-(f) = \inf_{\substack{E \text{ escalier} \\ E \geqslant f}} \int_a^b E\,.$$

Ces quantités sont finies en vertu du fait que f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$. On a :

$$I_+(f) \leqslant (b-a) \max_{x \in [a,b]} f(x)\,, \quad I_-(f) \geqslant (b-a) \min_{x \in [a,b]} f(x)\,.$$

Proposition 6.13. — *Si f est en escalier, on a $I_+(f) = I_-(f) = \int_a^b f$.*

Proposition 6.14. — *Soit f, g continues sur $[a,b]$. Si $f \leqslant g$, $I_+(f) \leqslant I_+(g)$.*

Proposition 6.15. — *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On a $I_+(f) = I_-(f)$. Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur $[a,b]$ et est encore notée $\int_a^b f$.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ et considérons les fonctions E_1 et E_2 définies en Proposition 6.11. On obtient facilement que, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|E_1(x) - E_2(x)| \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Ensuite, on a : $I_-(f) \leqslant \int_a^b E_2$ et $I_+(f) \geqslant \int_a^b E_1$. On en tire alors que

$$I_+(f) \geqslant \int_a^b E_2 - 2\varepsilon(b-a) \geqslant I_-(f) - 2\varepsilon(b-a)\,.$$

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $I_+(f) \geqslant I_-(f)$.

Par ailleurs, on a $I_-(f) \geqslant \int_a^b E_1$ et $I_+(f) \leqslant \int_a^b E_2$. On déduit de même que $I_+(f) \leqslant I_-(f)$.

□

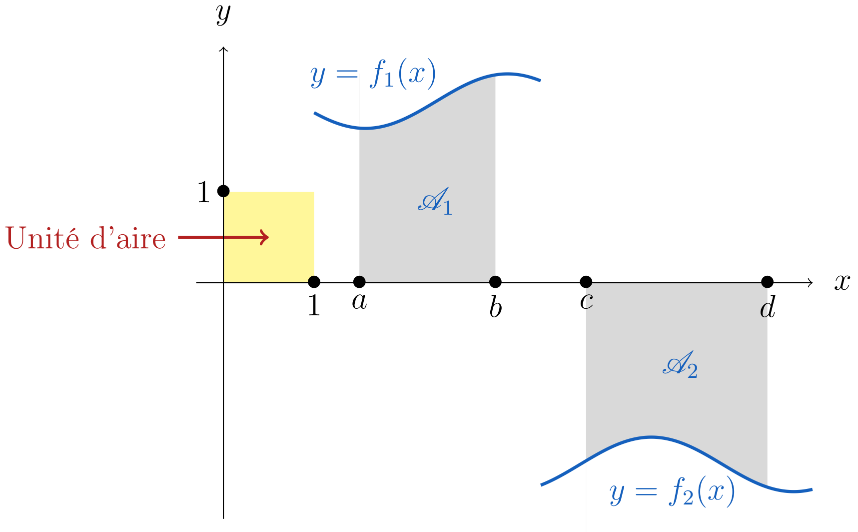


FIGURE 1. L'aire grisée $\mathscr{A}_1$ est « sous la courbe $y = f_1(x)$ », elle est de mesure $\int_a^b f_1(x)dx \geqslant 0$. L'aire grisée $\mathscr{A}_2$ est « au dessus de la courbe $y = f_2(x)$ », elle est de mesure $-\int_c^d f_2(x)dx \geqslant 0$.

6.2.2. Propriétés. —

***Proposition 6.16* (Linéarité de l'intégrale).** — *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :*

$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g\,.$$

***Proposition 6.17* (Croissance de l'intégrale).** — *Soit f, g continues sur $[a, b]$ telles que $f \leqslant g$. Alors on a*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g\,.$$

***Proposition 6.18* (Relation de Chasles).** — *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $c \in [a, b]$. On a :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

Proposition 6.19. — *Soit f continue sur $[a, b]$. On a $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.*

Démonstration. — Cela provient du fait que $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. □

Proposition 6.20. — *Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et d'intégrale nulle, alors f est nulle.*

Démonstration. — Soit $c \in [a, b]$. Supposons que $f(c) > 0$. Comme f est continue en c, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \eta, a + \eta] \cap [a, b]$, $f(x) > 0$. Or, on a :

$$\int_a^b f \geqslant \int_{\max(a,a-\eta)}^{\min(a+\eta,b)} f \geqslant \min_{x\in[\max(a,a-\eta),\min(a+\eta,b)]} f(x) > 0\,,$$

car f est continue sur le segment $[\max(a, a - \eta), \min(a + \eta, b)]$ et elle y atteint donc son minimum qui est strictement positif. □

Définition 6.21. — Si $b \leqslant a$ et f continue sur $[b, a]$ on pose $\int_a^b f = -\int_b^a f$. On vérifie aisément que les propriétés de linéarité, de Chasles sont toujours valables.

***Définition 6.22* (Valeur moyenne).** — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ ($a \leqslant b$). On appelle **valeur moyenne de f sur** $[a, b]$ le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

***Proposition 6.23* (Inégalité de la moyenne).** — *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ ($a \leqslant b$). Soit $m \in \mathbb{R}$ un minorant de f et $M \in \mathbb{R}$ un majorant de f sur $[a, b]$: pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Alors*

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M\,.$$

6.3. Primitives

6.3.1. Généralités. —

Proposition 6.24. — *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour $x \in [a, b]$, on pose :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. En d'autres termes, F est une primitive de f.

Démonstration. — Soit $x_0 \in]a, b[$ et $\varepsilon > 0$. f est continue en x_0. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset [a, b]$ et, pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On a, par la relation de Chasles,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\mathrm{d}t\,.$$

On applique la Proposition 6.19 à l'intégrale du membre de droite et la conclusion s'ensuit. On traite de même $x_0 = a, b$. □

Corollaire 6.25. — *Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ et de dérivée continue. Alors, pour tout $x, y \in]a, b[$,*

$$\int_x^y f' = f(y) - f(x)\,.$$

6.3.2. Un exemple fondamental : le logarithme népérien. — Un exemple très classique est la définition du logarithme népérien comme primitive s'annulant en 1 de la fonction inverse :

$$\forall x > 0\,, \quad \ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t\,.$$

On a montré que ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

6.3.3. Primitives usuelles. —

***Proposition 6.26* (Primitives usuelles).** — *Dans le tableau ci-dessous, u est une fonction $\mathscr{C}^1$ et u' est sa dérivée.*

f	$\int f(t)dt$
$n \in \mathbb{N}$, x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$n \in \mathbb{N}$, $u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{x^{n+1}}$	$-\dfrac{1}{nx^n}$
$n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{u'}{u^{n+1}}$	$-\dfrac{1}{nu^n}$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$

f	$\int f(t)dt$
e^x	e^x
$u'e^u$	e^u
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'\Big(1 + \tan^2(u)\Big)$	$\tan(u)$

6.4. Calcul d'intégrales

6.4.1. Intégration par parties. —

Proposition 6.27. — *Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors, on a :*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg' .$$

Démonstration. — On observe que $(fg)' = f'g + fg'$. On intègre ensuite sur $[a, b]$ et on applique le Corollaire 6.25. ☐

Exemple 6.28. — Trouver une primitive de $f :]0, +\infty[\ni x \mapsto \ln x \in \mathbb{R}$.

6.4.2. Changement de variable. —

Proposition 6.29. — *Soient $a < b$ et $c < d$. Soit f continue sur $[a, b]$ et soit $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[c, d]$ telle que $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Alors, on a :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\mathrm{d}y .$$

Exemple 6.30. — Calculer l'intégrale $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x$. On pourra utiliser le changement de variables $x = \cos u$.

6.4.3. Formule de Taylor et application. —

***Proposition 6.31* (Formule de Taylor avec reste intégral)**
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. Alors, on a, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b - t)^k \mathrm{d}t .$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur k. Pour $k = 0$, cette formule est claire car :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Supposons que la formule est satisfaite au rang $0 \leqslant k < n$. On peut donc écrire :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k\mathrm{d}t\,.$$

Comme $k+1 < n+1$, on $f^{(k+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut ainsi faire une intégration par parties :

$$\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k\mathrm{d}t = -\left[\frac{(b-t)^{k+1}}{k+1}f^{(k+1)}(t)\right]_a^b + \frac{1}{k+1}\int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1}\mathrm{d}t\,.$$

Cela implique :

$$\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(a) + \frac{1}{k+1}\int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1}\mathrm{d}t\,.$$

Il suffit alors de remplacer dans la formule supposée vraie par récurrence. □

Exemple 6.32. — Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. En appliquant la formule de Taylor à l'exponentielle, montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

6.5. Calcul intégral approché

Soit f une fonction suffisamment régulière sur $[\alpha, \beta]$. On va donner quelques méthodes d'approximation de $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Le cas écheant on donnera une estimation de l'erreur.

De façon générale, on se donne une subdivision de $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \beta\,.$$

On note, pour $i = 0, \cdots, k-1$.

$$h_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i\,.$$

On notera $h_{max} = \max(h_i)$.

6.5.1. Méthode des rectangles à gauche.

— Le principe est d'approcher l'intégrale par :

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i)\,.$$

Estimons l'erreur. On remarquera que cette méthode est exacte pour les fonctions constantes.

Proposition 6.33. — *On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On a :*

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i)\right| \leqslant \frac{M}{2}(\beta-\alpha)h_{max}\,,$$

où $M = \max_{[a,b]} |f'|$.

Démonstration. — On a :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (f(x) - f(\alpha_i))\mathrm{d}x\,.$$

Nous pouvons utiliser l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x) - f(\alpha_i| \leqslant M|\alpha_i - x|\,.$$

Il vient :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i)\right| \leqslant M \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (x - \alpha_i)\mathrm{d}x\,.$$

Ainsi, nous avons :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i)\right| \leqslant \frac{M}{2} \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)^2 = \frac{M}{2}(\beta - \alpha)h_{max}\,.$$

□

6.5.2. Méthode des rectangles à droite. — Le principe est d'approcher l'intégrale par :

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_{i+1})\,.$$

Exemple 6.34. — Calculer l'erreur de la méthode.

6.5.3. Méthode du point milieu. — Le principe est d'approcher l'intégrale par :

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i f\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}\right)\,.$$

Estimons l'erreur. On remarquera que cette méthode est exacte pour les fonctions affines.

Proposition 6.35. — *On suppose que f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On a*

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(c_i)\right| \leqslant \frac{M_2}{4}(\beta - \alpha)h^2\,,$$

où $M_2 = \frac{1}{2}\max_{[a,b]}|f''|$.

Démonstration. — On a

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(c_i) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (f(x) - f(c_i))\mathrm{d}x\,.$$

Nous utilisons la formule de Taylor à l'ordre 1, au point c_i :

$$|f(x) - f(c_i) - f'(c_i)(x - c_i)| \leqslant M_2|x - c_i|^2\,.$$

Ainsi, nous écrivons :

$$\left|\sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (f(x) - f(c_i) - f'(c_i)(x - c_i))\mathrm{d}x\right| \leqslant M_2 \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} |x - c_i|^2 dx \leqslant \frac{M_2}{4}(\beta - \alpha)h^2\,.$$

Nous remarquons :

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (x - c_i)dx = 0\,.$$

□

6.5.4. Méthode de Simpson. — Le principe est déja d'approcher f par des arcs de paraboles. On approche alors l'intégrale par :

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i \left(\frac{1}{6}f(\alpha_i) + \frac{4}{6}f(c_i) + \frac{1}{6}f(\alpha_{i+1})\right)\,.$$

Exemple 6.36. — Calculer l'erreur de la méthode.

6.6. Exercices

Exercice 109

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\pi} |\cos x|dx\,,\quad B = \int_{-2}^{3} |x^2 - x - 2|dx\,,\quad C = \int_{-1}^{2} \max(x^2 + 2x, 2x^3 + 1)dx\,.$$

Exercice 110

Marcel et Albertine montent dans leur voiture. Ils désirent emprunter la route qui les mènera de Combray à Balbec. Ils roulent sur cette route pendant une heure. Albertine s'ennuie profondément avec Marcel et ne trouve rien à lui dire. Pour passer le temps, elle regarde sa montre et les bornes kilométriques.

Elle estime que, durant le premier quart d'heure, la vitesse moyenne est de 80km/h et que, durant les trois derniers quarts d'heure, elle est de 84km/h. Elle se dit alors que la vitesse moyenne devrait être de 82km/h sur l'ensemble du trajet et en conclut qu'ils ont parcouru 82km. Que pensez-vous du raisonnement d'Albertine ? Combien de kilomètres ont-ils parcouru ?

On pourra considérer la fonction vitesse $t \mapsto v(t)$ (supposée continue et positive) et utiliser que la distance parcourue à l'instant t est

$$d(t) = \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

Exercice 111

À l'arrêt à l'instant $t = 0$, une voiture accélère à raison de $2,7m.s^{-2}$ pendant 10 secondes, puis roule à vitesse constante pendant 5 minutes. Au bout de ce temps, elle freine brusquement, à raison de $-9m.s^{-2}$, jusqu'à ce qu'elle s'immobilise. Calculer la vitesse moyenne de la voiture durant le trajet effectué et la distance parcourue.

Exercice 112

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1- x^2e^{-x}

2- $\arctan x$

3- $e^x\cos(x)$

4- $x^3e^{-x^2}$

5- $\ln x$

6- $\ln^2 x$

7- $x^3 \text{sh}\, x$

Exercice 113

Calculer une primitive des fonctions suivantes en les mettant sous la forme $\phi' f'(\phi)$

1- $\frac{1}{x^2+25}$

2- $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

3- $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

4- $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$

5- $\frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$

6- $\cos^3 x$

Exercice 114

Calculer une primitive des fonctions suivantes

1- $\frac{1}{\cos x}$

2- $\frac{1}{\text{ch}\, x}$

Exercice 115

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes et en calculer une primitive :

1- $\frac{1}{X^3-X}$

2- $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$

3- $\frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$

4- $\frac{X^4}{(X^2+X+1)^2}$

Exercice 116

Calculer les intégrales suivantes :

1- $\int_0^{1/2} \frac{t^3}{1-t}\, dt$

2- $\int_0^1 \frac{t}{t^2-t+1}\, dt$

3- $\int_0^1 \frac{3t^2+3t+2}{t^3+t^2+t+1}\, dt$

Exercice 117

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.
Répondre (en le justifiant) aux affirmations suivantes :

1- F est continue sur $\mathbb{R}$.

2- F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.

3- Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.

4- Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

5- Si f est négative sur $\mathbb{R}$ alors F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

6- Si f est paire alors F est impaire.

7- Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 118

1- Montrer que si $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2- Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :

$$a)\quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx \qquad\qquad b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(x)\right)\,dx.$$

Exercice 119

Déterminer toutes les fonctions continues $f\,:\,[a,\ b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\int_a^b f(t)dt\ = (b-a)\sup_{t\in[a,b]} f(t)\,.$$

Exercice 120

Soit $f\,:\,[0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Calculer la limite de la suite $u_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$.

Exercice 121

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1- Calculer I_0 et I_1.

2- Montrer que la suite (I_n) converge.

3- Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.

4- Montrer que le produit $(n\ +1)I_n I_{n+1}$ est constant.

5- Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n$.

6- Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.

Exercice 122

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx\,.$$

1- Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2- En déduire l'encadrement $0 \leqslant I_n \leqslant (n+1)^{-1}$, puis la limite de la suite (I_n).

Exercice 123

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!} dx\,.$$

1- Calculer I_0 et montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}\,.$$

En déduire que $e = s_n + I_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

2- Après avoir étudié les variations de $(1-x)e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$, démontrer l'encadrement

$$0 < \int_0^1 (1-x)^n e^x dx < \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1\,.$$

3- Établir l'encadrement $0 < e - s_n < (n!n)^{-1}$, puis démontrer que $\lim_{n\to\infty} s_n = e$.

4- Démontrer que le nombre e n'est pas rationnel. (Indication : en supposant que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $q \neq 0$, on s'intéressera à la nature du nombre $(e - s_q)q!$ et à sa localisation.)

Exercice 124

On considère deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, x_1 et x_2 et de dérivées continues. Le couple $(x_1(t), x_2(t))$ représente les coordonnées, dans le repère canonique du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, du point $M(t)$. En Physique, t représente le temps et un problème classique est de comprendre comment évolue la position $M(t)$ en fonction de t (en appliquant des principes physiques idoines). À cette fin, il est parfois commode de repérer le point $M(t)$ à l'aide de la distance à l'origine donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$r(t) = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}\,,$$

et à l'aide de l'angle $\theta(t)$ formé entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OM}(t)$. On suppose, pour simplifier, que $M_0 = (1,0)$.

Le but de cet exercice est de décrire la fonction θ. On suppose que $r > 0$.

Un cas particulier. — Commençons par examiner le cas particulier où $r = 1$, c'est-à-dire, quand, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = 1\,.$$

i) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t) = 0\,.$$

ii) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta(t) = \int_0^t (x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau))\mathrm{d}\tau\,.$$

Quelle est la dérivée de θ ?

iii) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1'(t) = -\theta'(t)x_2(t)\,, \quad x_1'(t) = \theta'(t)x_1(t)\,.$$

iv) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_1(t) = \cos\theta(t)\,, \quad y_2(t) = \sin\theta(t)\,,$$

et

$$f(t) = (x_1(t) - y_1(t))^2 + (x_2(t) - y_2(t))^2\,.$$

Calculer la dérivée de f et conclure que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1(t) = \cos\theta(t)\,, \quad x_2(t) = \sin\theta(t)\,.$$

Cas général. — Explorons maintenant le cas général. Posons, pour $j \in \{1,2\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}_j(t) = \frac{x_j(t)}{r(t)}$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta(t) = \int_0^t (\tilde{x}_1(\tau)\tilde{x}_2'(\tau) - \tilde{x}_2(\tau)\tilde{x}_1'(\tau))\mathrm{d}\tau\,.$$

i) Établir que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1(t) = r(t)\cos\theta(t)\,, \quad x_2(t) = r(t)\sin\theta(t)\,.$$

ii) Exprimer la dérivée de r en fonction de x_1, x_2, x_1' et x_2'.

iii) Exprimer les dérivées de $\tilde{x}_j$ avec fonction de x_j, x_j', r et r'.

iv) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta(t) = \int_0^t r^{-2}(\tau)(x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x_1'(\tau))\mathrm{d}\tau\,.$$

Exercice 125

On définit la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = x + \ln(x)$, pour tout $x > 0$.

1- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique $x_n \in]0,+\infty[$ tel que $f(x_n) = n$. Donner la valeur de x_1.

2- Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n).

3- Étudier le signe de $f(n) - n$ pour tout entier $n > 0$. En déduire que $x_n \leqslant n$. Par une méthode analogue, montrer que $n - \ln(n) \leqslant x_n$.

4- En déduire, si elle existe, la limite de $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

6.7. Le pont rêvé des étangs Saint-Nicolas

Sophie, étudiante en physique, habite à Avrillé et a rêvé qu'on faisait suspendre un pont de corde au-dessus des étangs Saint-Nicolas pour qu'elle se rende plus vite à l'université d'Angers. En se réveillant, elle se dit qu'elle connaît la distance à parcourir en ligne droite, et s'interroge sur la longueur à prévoir pour un tel pont. Elle demande conseil à Emmy, une étudiante en mathématiques.

En regardant le pont de loin, elle se disent qu'il ressemblerait à une corde dans un plan (quand il n'y a pas de vent !). Elles décident alors de considérer le plan muni de son repère canonique. Elles considèrent $A = (a, 0)$ avec $a > 0$. Elles conviennent que O désignera l'extrémité du pont de côté d'Avrillé et A celle du côté d'Angers. a est la distance entre O et A à vol d'oiseau.

6.7.1. Ce que pensait Galilée. — Sophie se souvient que Galilée conjecturait que cette courbe qui relie O à A est le graphe d'une fonction du second degré (c'est-à-dire une parabole).

Emmy affirme que, si Galilée a raison, il existe un nombre p tel que, pour tout $x \in [0, a]$,

$$f(x) = px(x - a)\,.$$

Expliquer pourquoi.

6.7.2. Quand Newton dit que Galilée a tort. — Sophie se souvient alors que le principe fondamental de la dynamique formulé par Newton pourrait permettre de décrire la fonction f. Au terme de quelques lignes de calculs mystérieux, elle affirme à Emmy que la fonction f est dérivable au moins deux fois et qu'il existe un nombre [1] $\Lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, a]$,

$$f''(x) = \Lambda\sqrt{1 + f'(x)^2} \tag{6.7.1}$$

et que $f(0) = f(a) = 0$ (puisque le graphe passe par O et A).

Emmy fait alors quelques calculs et affirme que la conjecture de Galilée est incompatible avec cette équation.

D'après vous, quel cheminement Emmy a-t-elle fait pour arriver à une telle conclusion ?

Sophie est bien désappointée.

6.7.3. Cosinus et sinus hyperboliques. — Emmy suit des cours de mathématiques et il lui est arrivé de rencontrer les cosinus et sinus hyperboliques. Elle ne leur a pas vu tout de suite une utilité, mais se souvient avoir trouvé les formules jolies. Elle se rappelle leurs définitions

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

i) Ces fonctions sont-elles dérivables ? Que valent leurs dérivées ?
ii) Montrer que $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
iii) Montrer que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection. On note argsinh sa bijection réciproque.
iv) Montrer que $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection.
v) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\cosh(a) = \cosh(b)$. Expliquer pourquoi $a = b$ ou $a = -b$.

6.7.4. Quand on devine une solution... — Emmy suggère alors d'introduire la fonction $g = f'$ et d'examiner l'équation

$$g'(x) = \Lambda\sqrt{(1 + g(x)^2}\,, \quad \forall x \in [0, a]\,. \tag{6.7.2}$$

i) Elle pense avoir deviné une fonction g qui pourrait vérifier (6.7.2). Elle devine qu'il devrait exister un nombre C tel que, pour tout $x \in [0, a]$,

$$g(x) = \sinh(\Lambda x + C)\,.$$

Montrer que cette fonction g vérifie (6.7.2).

ii) Emmy suggère alors qu'il existe une autre constante D telle que, pour tout $x \in [0, a]$,

$$f(x) = \frac{1}{\Lambda}\cosh(\Lambda x + C) + D\,.$$

Qu'est-ce qui lui faire dire ça ?

iii) Sophie remarque alors que les conditions $f(0) = f(a) = 0$ n'ont pas été utilisées. Elle affirme alors que

$$C = -\frac{\Lambda a}{2}\,, \quad D = -\Lambda^{-1}\cosh\left(\frac{\Lambda a}{2}\right)\,.$$

Expliciter son possible raisonnement.

1. Ce nombre est $\frac{\rho g}{T}$, où g est l'accélération de la pesanteur, ρ la masse linéique du pont assimilé à une corde et T la tension horizontale de la corde.

iv) Sophie considère donc la fonction, définie pour tout $x \in [0, a]$, par
$$f(x) = \frac{1}{\Lambda}\left(\cosh\left(\Lambda\left(x - \frac{a}{2}\right)\right) - \cosh\left(\frac{\Lambda a}{2}\right)\right).$$
Montrer que cette fonction vérifie (6.7.1).

v) Sophie se souvient qu'un professeur de physique avait expliqué comment trouver la longueur d'une courbe définie par le graphe d'une fonction. Il avait affirmé que la longueur est donnée par la formule
$$L = \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$
En regardant (6.7.1), Sophie sourit et écrit sur son brouillon :
$$L = \frac{2}{\Lambda}\sinh\left(\Lambda\frac{a}{2}\right).$$
D'où sort cette valeur ?

6.7.5. Résolution complète du problème. — Emmy et Sophie ont deviné une solution de (6.7.1). Sophie considère que son problème est résolu et abandonne Emmy. Mais Emmy n'est pas vraiment satisfaite. Elles n'ont fait que deviner une solution de (6.7.2) ! Elle en est convaincue : deviner n'est pas comprendre.

Elle écrit alors, pour tout $x \in [0, a]$,
$$\frac{g'(x)}{\sqrt{1 + g(x)^2}} = \Lambda\,.$$

i) Elle pose
$$F(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}\mathrm{d}v\,,$$
et observe que, pour tout $x \in [0, a]$,
$$(F \circ g)'(x) = \Lambda\,.$$
Justifier.

ii) En utilisant le changement de variable $v = \sinh(x)$, Emmy en déduit que
$$F(u) = \operatorname{argsinh}(u)\,.$$
Expliquer.

iii) Emmy est enfin satisfaite. Pourquoi ?

CHAPITRE 7

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Dans tout ce chapitre, nous travaillons au voisinage d'un point a (qui sera très souvent 0 d'ailleurs). Nous utiliserons en permanence des fonctions $\varepsilon(x), \varepsilon_1(x), \ldots, \eta(x)$ qui sont toutes destinées à tendre vers 0 quand x tend vers le point a autour duquel nous travaillons. Il ne faudra jamais perdre de vue ceci même si quelquefois, pour éviter des lourdeurs d'écriture, nous omettons de réécrire "$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$".

7.1. Introduction et définition

Soit f une fonction dérivable au point a ; on sait qu'on peut écrire

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$ est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a. Cette courbe "colle" à la courbe, et c'est celle qui approche le mieux la courbe au voisinage de a.
La fonction polynôme $P(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$ donne une approximation de f au voisinage de a puisque la différence $f(x) - P(x)$, égale à $(x-a)\,\varepsilon(x)$ tend plus vite vers 0 que $x - a$ lorsque x tend vers a.
Lorsque f est dérivable en a, on sait donc approcher f au voisinage de a par une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Pour obtenir de meilleures approximations, on va tout naturellement chercher à approcher f par des polynômes de degré plus élevé.

Dans ce chapitre, nous donnons les moyens d'écrire une fonction comme somme d'un polynôme et d'une quantité "négligeable". C'est la notion de développement limité.

Définition 7.1. — On dit qu'une fonction f est *négligeable* devant une fonction g quand x tend vers a s'il existe une fonction h définie sur un intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ $(\alpha > 0)$, sauf peut-être en a, telle que

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,,\ f(x) = g(x)\,h(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 0\,.$$

On note alors $f = o_a(g)$ (lire : f est un petit o de g au voisinage de a). C'est ce qu'on appelle la *notation de Landau*.

Exemple 7.2. — $x^3 = o_0(x^2)$ puique $x^3 = x^2 \times x$ avec $\lim_{x\to 0} x = 0$.

Remarque 7.3. — 1. Si $g(x) \neq 0$ sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ (sauf peut-être en a), alors

$$f = o_a(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

2. Lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira simplement $f = o(g)$ au lieu de $f = o_a(g)$.

Dans un premier temps, nous ne considérerons que des développemnts limités au voisinage de 0 ; nous étudierons le cas général plus tard.

Définition 7.4. — Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[$ (sauf éventuellement en 0) et soit n un entier naturel. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n en 0* s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction ε définie dans $]-\alpha,\alpha[$ (sauf peut-être en 0) tels que

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[\ ,\quad f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ est appelé *partie régulière d'ordre n* du développement limité ; tandis que le terme $x^n\,\varepsilon(x)$ est *le reste* du développement limité.

La partie régulière d'ordre n d'un développement limité en 0 de f est également appelée *le polynôme de Taylor de degré n en* 0 de f.

Remarque 7.5. — Par définition, le développement limité ci-dessus peut donc s'écrire aussi

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)\,.$$

Cette notation est d'usage plus pratique mais il faut bien comprendre que $o(x^n)$ désigne une fonction de la forme $x^n\,\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ est une fonction de limite nulle en $x = 0$.

7.2. Propriétés immédiates des développements limités

Proposition 7.6. — *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 donné par $f(x) == a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\,\varepsilon(x)$. Alors,*

1. *f est continue en 0 et on a $f(0) = a_0$.*
2. *f est dérivable en 0 si, et seulement si $n \geqslant 1$ et dans ce cas, on a $f'(0) = a_1$.*

Démonstration. —

Remarque 7.7 (1.) — Par définition de la continuité en 0, il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que $f(x) = f(0) + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Cela montre bien que f admet un développement limité d'ordre 0 à l'origine.
Si f est dérivable en 0, cela signifie que l'on peut écrire $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\,\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Cela signifie que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.
Réciproquement, si f admet un développement limité à un ordre $n \geqslant 1$ en 0, alors $a_0 = f(0)$ et $(f(x) - f(0))/x$ admet une limite quand x tend vers 0 et cette dernière est égale à a_1 ; ceci signifie précisément que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = a_1$.

□

Remarque 7.8. — On verra plus loin que si f est n fois dérivable au voisinage de 0, alors elle admet un développement limité à l'ordre n en 0. Mais la réciproque est fausse dès que $n \geqslant 2$. Par exemple, $f(x) = 1 - 5x + 2x^2 + x^3 \sin\frac{1}{x}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais f n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Proposition 7.9. — *Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0, alors celui-ci est unique.*

Démonstration. — Supposons que f admette deux développements limités à l'ordre n sur le voisinage $]-\alpha,\alpha[$ de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\,\varepsilon(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + x^n\,\eta(x) \tag{7.2.1}$$

où $\varepsilon(x)$ et $\eta(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers 0.

Nous avons vu précédemment que $a_0 = f(0)$ et $b_0 = f(0)$, ce qui implique $a_0 = b_0$.

En éliminant a_0 et b_0 de l'égalité ci-dessus, nous obtenons pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$:

$$a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \ = \ b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^n \eta(x)$$

égalité dans laquelle nous pouvons diviser par x (pour x non nul) et obtenir la relation

$$a_1 + \ldots + a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x) \ = \ b_1 x + \ldots + b_n x^{n-1} + x^{n-1} \eta(x).$$

En faisant tendre x vers 0, sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to 0} \eta(x) = 0$, nous obtenons $a_1 = b_1$.

Il suffit maintenant de répéter n fois ce procédé pour montrer que $a_k = b_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. La dernière étape fait intervenir l'égalité $a_n + \varepsilon(x) = b_n + \eta(x)$, valable pour tout x dans $]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}$.

Un passage à la limite quand x tend vers 0 nous donne alors $a_n = b_n$ et donc $\varepsilon(x) = \eta(x)$ pour tout x de $]-\alpha, \alpha[$.

Les deux développements dans (7.2.1) ont les mêmes coefficients et le même reste : il y a donc bien unicité du développement limité. □

Remarque 7.10. — La proposition ci-dessus affirme simplement l'unicité de l'éventuel développement limité de f, elle n'affirme pas du tout qu'un tel développement existe.

Une fonction quelconque n'a aucune raison d'admettre un développement limité à un ordre n donné au voisinage de 0. Ainsi, la fonction *partie entière* n'est pas continue en 0 : elle n'admet donc pas de développement limité au voisinage de 0, à quelque ordre que ce soit. De même, la fonction *valeur absolue* admet un développement limité à l'ordre 0 (ce qui signifie qu'elle est continue en 0), mais n'admet pas de développement limité à un ordre $n \geqslant 1$ puisqu'elle n'est pas dérivable en $x = 0$.

Une bonne approximation à un ordre élevé doit logiquement impliquer qu'on peut aussi avoir une approximation moins bonne. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 7.11. — *Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 :*

$$f(x) \ = \ a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

alors pour tout entier p inférieur à n, la fonction f admet un développement limité d'ordre p en 0, développement dont la partie régulière s'obtient en prenant les termes de degré inférieur ou égal à p dans la partie régulière du développement limité d'ordre n :

$$f(x) \ = \ a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + x^p \eta(x)$$

où $\eta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Démonstration. — En effet, l'égalité

$$f(x) \ = \ a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

peut s'écrire

$$f(x) \ = \ a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + x^p \times \big(a_{p+1} x + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon(x)\big)$$

où $\eta(x) = a_{p+1} x + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0. □

Rappelons qu'un polynôme est dit *pair* (respectivement *impair*) lorsqu'il ne contient que des puissances paires (respectivement impaires) de x. Il est donc raisonnable d'imaginer qu'une fonction paire (respectivement impaire) est approchée au voisinage de 0 par un polynôme pair (respectivement impair).

Proposition 7.12. — *Soit f une fonction ayant un développement limité d'ordre n en 0 :*

– *si f est paire alors son développement limité n'a que des termes pairs,*

– *si f est impaire alors son développement limité n'a que des termes impairs.*

Démonstration. — Supposons par exemple f paire. On a alors $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$. Sur cet intervalle, on a donc

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 + \ldots + (-1)^n a_n x^n + x^n\,\varepsilon(-x) \;=\; a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\,\varepsilon(x).$$

Par unicité du développement limité, on a alors $a_1 = -a_1$, $a_3 = -a_3 \ldots$. Tous ces coefficients $a_1, a_3, \ldots$ d'ordre impair sont donc nuls.
On procède de manière analogue pour montrer que lorsque f est impaire, tous les coefficients d'ordre pair sont nuls. □

Remarque 7.13. — On démontrera plus loin que le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $\sin x$ est donné par

$$\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \;+\; x^5\,\varepsilon(x)\,.$$

Or, si l'on cherche son développement à l'ordre 6, la partie régulière sera la même puisque $\sin x$ étant impaire, son développement ne contient que des puissances impaires de x. On peut donc tout aussi bien écrire

$$\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \;+\; x^6\,\eta(x).$$

Ainsi, pour une fonction paire, une partie principale contenant des puissances $x^2, \ldots,$ jusqu'à x^{2n} correspond donc à un développement limité à l'ordre $2n$, mais en fait à l'ordre $2n+1$.

De même, pour une fonction impaire, une partie principale contenant des puissances $x, \ldots,$ jusqu'à x^{2n+1} correspond donc à un développement limité à l'ordre $2n+1$, mais en fait à l'ordre $2n+2$.

7.3. Développements limités en un point a

Jusqu'à présent nous avons parlé de développement limité au voisinage de 0. Il est en fait possible de faire des développements limités au voisinage de tout point a.

Définition 7.14. — Soit a un réel et f une fonction définie sur un voisinage $]a-\alpha, a+\alpha[$. On dit que f a un développement limité à l'ordre n au voisinage de a si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$\forall h \in]-\alpha, \alpha[\;,\; f(a+h) \;=\; a_0 + a_1h + \ldots + a_nh^n + h^n\,\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

En d'autres termes, pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$, on a

$$f(x) \;=\; a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\,\eta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \eta(x) = 0.$$

La partie régulière du développement limité est toujours un polynôme en $x - a$: on ne développera pas ce polynôme suivant les puissances de x, on le gardera en $x - a$.

Remarque 7.15. — Écrire le développement limité de f en a, c'est écrire le développement limité au voisinage de 0 de la fonction g définie par $g(h) = f(a+h)$; cela explique qu'en pratique toutes les formules classiques de développement limité sont données au voisinage de 0, puisqu'on s'y ramène toujours.

Exemple 7.16. — Calculons le développement limité à l'ordre 2 en $x = 1$ de la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$.
On se ramène au voisinage de 0 en posant $x = 1 + h$, d'où

$$f(1+h) = (1+h)^3 + 2\,(1+h)^2 + 3 \;=\; 6 + 7h + 5h^2 + h^2\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) = h$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
Pour tout x au voisinage de 1, on a donc

$$f(x) \;=\; 6 + 7\,(x-1) + 5\,(x-1)^2 + (x-1)^2\,\eta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 1}\eta(x) = 0.$$

Il ne faut surtout pas développer les différentes puissances de $x - 1$!

7.4. La formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young, appelée aussi formule de Taylor avec reste de Young, joue un rôle crucial pour l'étude locale d'une fonction et elle est particulièrement bien adaptée aux problèmes de développement limité.

***Théorème 7.17* (formule de Taylor-Young).** — *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et n un entier $\geqslant 0$. On suppose que f est n fois dérivable sur I. Alors il existe une fonction $\varepsilon(x)$ définie sur I, qui tend vers 0 quand x tend vers a, telle que que l'on ait pour tout $x \in I$:*

$$f(x) \;=\; f(a) + \frac{x-a}{1!}\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x)\,.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, l'hypothèse implique que f est continue en a et la formule est évidente avec $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. Pour $n = 1$, la formule n'est autre que le développement limité de f d'ordre 1 au point a, dont l'existence équivaut à la dérivabilité de f en a.

Supposons la formule vraie pour $n-1$, $n \geqslant 2$, et passons à n. On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre $n - 1 \geqslant 1$ à la fonction f' qui en vérifie les hypothèses. En particulier, f' est dérivable, donc continue. On a donc pour tout $t \in I$:

$$f'(t) \;=\; f'(a) + \frac{t-a}{1!}\,f''(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{n-1}}{n!}\,f^{(n)}(a) + (t-a)^{n-1}\varepsilon_0(t)\,,$$

où $\varepsilon_0(t)$ tend vers 0 quand t tend vers a. On note que la fonction $(t-a)^{n-1}\,\varepsilon_0(t)$ est différence de deux fonctions continues (la fonction f' et le polynôme de Taylor), donc elle est continue. On peut donc intégrer l'égalité précédente entre a et x ($x \neq a$) et on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^x f'(t)\,dt = (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + \int_a^x (t-a)^{n-1}\,\varepsilon_0(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

L'intégrale du premier membre vaut $f(x) - f(a)$. On définit la fonction ε par la formule

$$\varepsilon(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^n}\displaystyle\int_a^x (t-a)^{n-1}\,\varepsilon_0(t)\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad x \neq a \\ 0 & \text{si} x = a\,. \end{cases}$$

Avec cette fonction on a la formule de Taylor-Young pour f dès lors qu'on aura démontré que $\varepsilon(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers a. Pour cela, soit $\epsilon > 0$. Comme $t \mapsto \varepsilon_0(t)$ tend vers 0 au point a, il existe un $\eta > 0$ tel que $|t-a| < \eta$ implique $\varepsilon_0(t)| < \epsilon$. Si on suppose $|x-a| < \eta$, on a alors

$$|\varepsilon(x)| \;\leqslant\; \frac{\epsilon}{|x-a|^n}\,\Big|\int_a^x (t-a)^{n-1}\,dt\Big| \;=\; \frac{\epsilon}{n}.$$

On en déduit que, pour $|x-a|<\eta$, on a $|\varepsilon(x)|<\epsilon/n$ ce qui signifie que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a. □

Très souvent on se place au voisinage de $x=0$ et la formule devient :

***Corollaire 7.18* (formule de Mac-Laurin).** — *Soit f une fonction de classe n fois dérivable sur un intervalle ouvert non vide I contenant 0. Alors il existe une fonction ε définie sur I telle que*

$$f(x) \;=\; f(0) \;+\; \frac{x}{1!}\,f'(0) \;+\; \frac{x^2}{2!}\,f''(0) \;+\; \dots \;+\; \frac{x^n}{n!}\,f^{(n)}(0) \;+\; x^n\,\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Ainsi toute fonction f, n fois dérivable au voisinage de 0, admet un développement limité à l'ordre n en ce point et les coefficients de ce développement sont $f(0), f'(0), f''(0)/2!, \dots, f^{(n)}(0)/n!$.

Mais, comme on l'a vu, la réciproque est fausse.

7.5. Liste de développements limités usuels

Tous les développements limités de cette section sont au voisinage de 0. Pour les obtenir, le premier moyen est de calculer les dérivées successives et d'en déduire le polynôme de Taylor.

Soit $f(x)=\sin x$. Cette fonction est clairement n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n\geqslant 1$. De plus, on a

$$f'(x)=\cos x\ ,\ f''(x)=\cos x\ ,\ f^{(3)}(x)=-\cos x\ ,\ f^{(4)}(x)=\sin x\quad\dots$$

Par récurrence, on en déduit que

$$f^{(2p)}(0)\;=\;0\quad\text{ et }\quad f^{(2p+1)}(0)=(-1)^p\,.$$

La formule de Mac-Laurin nous fournit donc, au voisinage de 0, le développement limité suivant :

– $\sin x \;=\; x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\;+\;o(x^{2n+2}).$

– $\cos x \;=\; 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\,\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\;+\;o(x^{2n+1})$

– $e^x \;=\; 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}\;+\;o\,(x^n)$

– $\cosh x \;=\; \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\;=\;1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\;+\;o\,(x^{2n+1})$

– $\sinh x \;=\; \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\;=\;x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\;+\;o\,(x^{2n+2})$

– $\ln(1+x) \;=\; x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dots+\;(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}\;+\;o(x^n)$

– $(1+x)^\alpha \;=\; 1+\alpha\,x+\dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\,x^2+\dots+\;\dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\,\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n\;+\;o(x^n)$
 pour α nombre réel fixé quelconque.

En particulier, pour $\alpha=1/2$, on a

– $\sqrt{1+x}\;=\;1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}\,x^2+\dots+\;\dfrac{(-1)^{n-1}\,1.3.5\dots(2n-3)}{2^n\,(n!)}\,x^n\;+\;o(x^n)$

– De même, pour $\alpha=-1/2$, on obtient

– $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n\, 1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\,(n!)}\, x^n + o(x^n)$

– Et pour $\alpha = -1$, on a

– $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Ces formules sont utilisées fréquemment, il est fortement conseillé de les connaître par coeur.

7.6. Opérations sur les développements limités

On ne calcule presque jamais un développement limité en appliquant la formule de Taylor-Young. En effet, on effectue des sommes, produits, compositions, etc. de développements limités de fonctions élémentaires connues comme celles listées ci-dessus. Dans ce paragraphe on considère deux fonctions f et g définies sur un voisinage $]a-\alpha, a+\alpha[$ de a, admettant chacun un développement limité à l'ordre n en a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a}\varepsilon_1(x) = 0 \\ g(x) &= b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a}\varepsilon_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Par changement de variable (translation), on se ramènera systématiquement en 0 pour les démonstrations.

7.6.1. Somme de développements limités. —

Proposition 7.19. — *Si f et g admettent un développement limité au même ordre n en a, alors la somme $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie régulière est la somme des parties régulières de f et de g.*

Démonstration. — On a en effet

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \ldots + (a_n+b_n)x^n + x^n\,\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. □

Remarque 7.20. — On fait la somme de développements limités de même ordre : si f admet un développement limité à un ordre $m > n$, on se ramène dans un premier temps à un développement limité à l'ordre n et on obtient ensuite le développement limité à l'ordre n pour la somme $f+g$.

7.6.2. Produit de développements limités. —

Proposition 7.21. — *Si f et g admettent un développement limité au même ordre n en a, alors le produit $f \times g$ admet un développement limité au même ordre n en a, développement dont la partie régulière s'obtient en effectuant le produit des parties régulières de f et g et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.*

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} f(x) \times g(x) &= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x)) \times (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x)) \\ &= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) \times (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) + x^n\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_3(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\varepsilon_2(x) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n)\varepsilon_1(x) + x^n\,\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

tend vers 0 quand x tend vers 0.

De plus,

$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \times (b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)$

$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \ldots + (a_n b_0 + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)\, x^n + (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1})\, x^{2n-1} + a_n b_n x^{2n}$

$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \ldots + (a_n b_0 + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_0)\, x^n + x^n\, \varepsilon_n(x)$

où $\varepsilon_n(x) = (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1)\, x + \ldots + a_n b_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Finalement, on a

$$f(x) \times g(x) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \ldots + (a_n b_0 + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_0)x^n + x^n\, \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = \varepsilon_3(x) + \varepsilon_n(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. □

Exemple 7.22. — Calculons le développement limité de $f(x) = \cos x \times e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

En prenant le développement à l'ordre 4 en 0 des fonctions $\cos x$ et e^x, on a

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\, \varepsilon_1(x)\right) \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\, \varepsilon_2(x)\right)$$

et l'on effectue le produit des parties régulières en ne conservant que les puissances inférieures ou égales à 4 ; toutes les autres entrent dans le reste. On obtient

$$f(x) \;=\; 1 + x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right)x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

d'où

$$\cos x \times e^x \;=\; 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)\,.$$

7.6.3. Composition de développements limités. —

Proposition 7.23. — *Soit g une fonction telle que $g(0) = 0$ et admettant un développement limité d'ordre n en 0 :*

$$g(x) = b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

Soit f une fonction ayant un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x).$$

Alors la composée $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 dont on obtient la partie régulière en développant l'expression

$$a_0 + a_1\, (b_1 x + \ldots + b_n x^n) + \ldots + a_n\, (b_1 x + \ldots + b_n x^n)^n$$

et en n'y conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Remarque 7.24. — La fonction f est définie dans un voisinage $]-\alpha, \alpha[$ de 0, la fonction g étant continue en 0 et vérifiant $g(0) = 0$, il existe un intervalle $]-\beta, \beta[$ dont l'image par g est incluse dans $]-\alpha, \alpha[$. La compsée $f \circ g$ considérée dans la proposition ci-dessus est donc au moins définie sur l'intervalle $]-\beta, \beta[$.

Exemple 7.25. — 1) On a vu au paragraphe 1.5 qu'au voisinage de 0, on a

- $\dfrac{1}{1+x} \;=\; 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n\, x^n + o(x^n).$

En composant avec $x \mapsto -x$, on obtient aussitôt

- $\dfrac{1}{1-x} \;=\; 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + \, x^n + o(x^n).$

2) Calculons le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^{x \sin x}$.

On a $e^{x \sin x} \;=\; (f \circ g)(x)$ avec $f(x) = e^x$ et $g(x) = x \sin x$.

On a bien $g(0) = 0$. De plus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc

$$x \sin x \ = \ x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4). \tag{7.6.1}$$

De même,

$$e^u \ = \ 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4). \tag{7.6.2}$$

En remplaçant dans (9.3) la variable u par la partie régulière de (9.2), on a

$$\begin{aligned} e^{x \sin x} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x^2 - \frac{x^4}{6}\right)^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

7.6.4. Calcul du développement limité d'un quotient. —

Proposition 7.26. — *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 et admettant en 0 un développement limité au même ordre n de parties régulières respectives*

$$A(x) \ = \ a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$B(x) \ = \ b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \quad \text{avec} \quad g(0) = b_0 \neq 0.$$

Alors le quotient f/g est défini au voisinage de 0 et y admet un développement limité à l'ordre n.

Démonstration. — On considére le quotien $1/g$ comme une fonction composée, en mettant la constante non nulle b_0 en facteur pour avoir

$$g(x) \ = \ b_0 \left(1 + \frac{b_1}{b_0}\, x + \ldots + \frac{b_n}{b_0}\, x^n + \frac{x^n}{b_0}\, \varepsilon_2(x)\right) \ = \ b_0 \times (1 + u)$$

et développer

$$\frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0}\, x + \ldots + \frac{b_n}{b_0}\, x^n + \frac{x^n}{b_0}\, \varepsilon_2(x)} \ = \ \frac{1}{1+u}$$

en utilisant le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ où u est au voisinage de 0.

Pour obtenir le développement limité du quotient f/g, on effectue ensuite la multiplication du développement limité de $1/g$ par celui de f. □

Exemple 7.27. — Calculons le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{\cos x}{\mathrm{ch} x}$.

La formule de Taylor-Young nous donne

$$\mathrm{ch} x \ = \ 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)$$

et nous savons aussi que pour u au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{1+u} \ = \ 1 - u + u^2 + \varepsilon_2(u)$$

où un développement limité d'ordre 2 suffit puisque la partie régulière du développement de ch$x$ ne comporte que des puissances de x^2. On a ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{ch}x} &= \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon_1(x)} \\ &= 1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+x^4\varepsilon_3(x),\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{\mathrm{ch}x} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{14}x^4+x^4\varepsilon_4(x).$$

Comme

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon_5(x),$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x} &= \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+x^4\varepsilon_4(x)\right)\times\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon_5(x)\right) \\ &= 1-x^2+\frac{x^4}{2}+x^4\varepsilon(x).\end{aligned}$$

7.6.5. Intégration d'un développement limité. — Voici un résultat très pratique pour le calcul de développements limités, mais il faut faire très attention à l'énoncé exact de la proposition :

Proposition 7.28. — *Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0 et dont la dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0 :*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)\,.$$

Alors la fonction f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie régulière s'obtient en intégrant terme à terme la partie régulière du développement de f' en y ajoutant la constante $f(0)$:

$$f(x) = f(0) + a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\eta(x)\,,$$

où $\eta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Remarque 7.29. — On fera très attention qu'on suppose que la dérivée f' admet un développement limité et que l'on en déduit que la fonction f elle-même admet un développement limité et non le contraire !
On notera aussi qu'une fonction f peut admettre un développement limité à un ordre n en un point sans que sa dérivée y admette un développement limité à l'ordre $n-1$.
Par exemple, la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 puisque

$$f(x) = x^2\,\varepsilon(x) \;\text{ avec }\; \varepsilon(x) = x\sin\frac{1}{x}$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
Par ailleurs, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$ et l'étude de $f'(x)$ quand x tend vers 0 permet de voir que f' n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en 0.

On pourra donc retenir le résultat ci-dessus sous la forme (moins dangereuse) suivante :

Proposition 7.30. — *Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0 et admettant un développement limité à l'ordre n en 0 :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Alors toute primitive F de f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par la formule :

$$F(x) \; = \; F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\eta(x),$$

où $\eta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Démonstration. — Il suffit de considérer la primitive F de f qui s'annule en 0. On a alors par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} F(x) \; &= \; \int_0^x f(t)\,dt \; = \; \int_0^x (a_0 + a_1 + \ldots + a_n t^n)\,dt + \int_0^x t^n\,\varepsilon(t)\,dt \\ &= \; a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x t^n\,\varepsilon(t)\,dt, \end{aligned}$$

et observons que la fonction $t \mapsto t^n\,\varepsilon(t)$ est continue sur I comme différence de f et de son polynôme de Taylor d'ordre n.
Posons alors

$$\varepsilon_1(x) \; = \; \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n\,\varepsilon(t)\,dt.$$

Il reste à montrer que

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) \; = \; 0.$$

Mais puisque $\varepsilon(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0, on a

$$\forall \varepsilon' > 0\ ,\ \exists \alpha > 0\ ,\ \ |t| < \alpha \;\Rightarrow\; |\varepsilon(t)| < \varepsilon'.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, on déduit que

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(x)| \; &= \; \left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n\,\varepsilon(t)\,dt \right| \\ &\leqslant \; \left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x |t^n\,\varepsilon(t)|\,dt \right| \\ &\leqslant \; \varepsilon' \left| \frac{1}{x^{n+1}} \right| \int_0^x |t|^n\,dt \;\leqslant\; \frac{\varepsilon'}{n+1} \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. □

Exemple 7.31. — Calculons le développement limité de la fonction $x \mapsto \arctan x$. On sait que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel, on a

$$\arctan'(x) \; = \; \frac{1}{1+x^2}.$$

En utilisant le développement limité de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ on déduit que

$$\arctan'(x) \; = \; 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n\,x^{2n} \; + \; x^{2n+1}\,\varepsilon(x).$$

À l'aide de la proposition ci-dessus et sachant que $\arctan 0 = 0$, on a finalement

$$\arctan x \; = \; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \; + \; x^{2n+2}\,\eta(x).$$

7.7. Développements limités et calcul de limites

L'utilisation des développements limités est l'outil le plus puissant pour résoudre les problèmes de forme indéterminée et trouver les limites de fonctions.

7.7.1. Recherche d'équivalent en un point a. — Pour trouver un équivalent de la fonction f que ce soit en 0 ou en un point a quelconque, on développe f jusqu'au premier terme non nul dans son développement limité.
Un équivalent de f est alors fourni par le premier terme non nul de son développement limité. En effet, si l'on a trouvé

$$f(x) \;=\; a_n\, x^n \;+\; x^n\, \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0$$

alors on peut écrire

$$f(x) \;=\; a_n\, x^n \left(1 \;+\; \frac{\varepsilon(x)}{a_n}\right),$$

et comme la quantité entre parenthèses tend vers 0 quand x tend vers 0, on en déduit que

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_n\, x^n.$$

Il en va de même au voisinage d'un point a quelconque.

Exemple 7.32. — 1) Trouvons un équivalent de $x^2 - \sin^2 x$ au voisinage de 0.
On a $\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, donc

$$\sin^2 x \;=\; \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^2 \;=\; x^2 - \frac{x^4}{3} \;+\; x^4\, \eta(x).$$

Donc $x^2 - \sin^2 x \;=\; \frac{x^4}{3} \;-\; x^4\, \eta(x)$, d'où $x^2 - \sin^2 x \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{3}$.
2) Trouvons un équivalent de $f(x) = e^{2x} \cos x$ au voisinage de $\pi/2$.
La fonction e^{2x} est évidemment équivalente à sa valeur (non nulle) e^{π} au voisinage de $\pi/2$.
Cherchons maintenant un développement limité de cos en $\pi/2$. En posant $x = u + \frac{\pi}{2}$, on se ramène à la recherche d'un équivalent au voisinage de 0 et on a

$$\cos x \;=\; \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) \;=\; -\sin u \;=\; -u \;+\; u\,\varepsilon(u) \;=\; \frac{\pi}{2} - x \;+\; \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \eta(x)$$

où $\eta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pi/2$.
On en déduit que $\cos x$ est équivalent à $\frac{\pi}{2} - x$ au voisinage de $\pi/2$, et finalement

$$e^{2x} \cos x \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} e^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

7.7.2. Recherche d'équivalent en $\pm\infty$. — La méthode consiste à poser $y = \frac{1}{x}$ où y tend vers 0 quand x tend vers l'infini et l'on fait un développement limité de $g(y) \;=\; f(1/y)$ jusqu'à trouver son premier terme non nul.

Exemple 7.33. — Trouvons un équivalent de $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ en $+\infty$.
En posant $y = 1/x$, on a

$$f(x) \;=\; f\left(\frac{1}{y}\right) \;=\; \sqrt[3]{\frac{1}{y}} \times (\sqrt[3]{1+y} - 1) \;=\; y^{-1/3}\, \big((1+y)^{1/3} - 1\big).$$

On en déduit que

$$f\left(\frac{1}{y}\right) \;=\; y^{-1/3} \left(1 + \frac{y}{3} + y\,\varepsilon(y) - 1\right) \;=\; \frac{1}{3}\, y^{2/3}\, (1 + 3\,\varepsilon(y))$$

et donc

$$f\Big(\frac{1}{y}\Big) \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}\ y^{2/3}$$

c'est-à-dire

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\ \frac{1}{x^{2/3}}.$$

7.7.3. Calculs de limites, formes indéterminées. — Les limites difficiles à calculer se présentent sous forme indéterminée. Les développements limités permettent de *lever ces indéterminations*. Voici deux cas importants que l'on rencontre souvent.

7.7.3.1. *La forme indéterminée "$\frac{0}{0}$".* — Il s'agit de calculer la limite de $f(x)/g(x)$ quand x tend vers 0 sachant que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers 0. La méthode consiste à chercher en premier lieu le développement limité du dénominateur g jusqu'au premier ordre donnant une partie régulière non nulle. On effectue ensuite le développement limité du numérateur à cet ordre défini par le dénominateur.

Exemple 7.34. — Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$:
On doit développer le numérateur à l'ordre 3, soit : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\,\varepsilon(x)$. On a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \Big(-\frac{1}{6} + \varepsilon(x)\Big) = -\frac{1}{6}.$$

7.7.3.2. *La forme indéterminée "1^∞".* — On cherche à calculer la limite de $f(x)^{g(x)}$ quand x tend vers 0 sachant qu'en ce point $f(x)$ tend vers 1 et $g(x)$ tend vers $+\infty$. Cette forme indéterminée "1 puissance l'infini" se ramène à une forme indéterminée " $0\times\infty$" en écrivant $\big(f(x)\big)^{g(x)} = \exp\big(g(x)\,\ln f(x)\big)$ (on notera que $f(x) > 0$ au voisinage de 0 puisque $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0).

Exemple 7.35. — Calculons $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.
On a $(\cos x)^{1/x^2} = \exp\big(\frac{1}{x^2}\ \ln\cos x\big)$. Sachant qu'on a fait apparaître un dénominateur en x^2, il nous faut développer $\ln\cos x$ à l'ordre 2, c'est-à-dire développer à l'ordre 2 la quantité ln $\big(1-\frac{x^2}{2}+x^2\,\varepsilon(x)\big)$. Il suffit en fait de prendre le développement de ln au premier ordre et on a $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} + x^2\,\eta(x)$.
Nous en déduisons que

$$\frac{1}{x^2}\ \ln\cos x = -\frac{1}{2} + \eta(x)$$

tend vers $-1/2$ quand x tend vers 0. Par continuité de la fonction exponentielle, on conclut que

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

7.8. Applications à l'étude locale des courbes

Faire le développement limité à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point x_0, c'est *approcher* cette fonction par un polynôme de degré inférieur ou égal à n, la différence entre la fonction et ce polynôme étant négligeable devant $(x - x_0)^n$. L'utilisation des développements limités permet donc une étude *locale* des courbes. Voici quelques exemples fréquents de cette utilisation.

7.8.1. Position d'une courbe par rapport à sa tangente. — Rappelons que l'équation de la tangente (lorsqu'elle existe) à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est donnée par la partie régulière du développement limité de f à l'ordre 1 en x_0.
Si $f(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x)$ est ce développement limité, on sait que $a_0 = f(x_0)$ et que $a_1 = f'(x_0)$, une équation de la tangente est bien

$$y \;=\; a_0 \;+\; a_1\,(x - x_0)$$

Pour obtenir une équation de la tangente et la position de la courbe par rapport à cette tangente, on cherche le développement limité de f en x_0 à un ordre $n \geqslant 2$:

$$f(x) \;=\; a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_n\,(x - x_0)^n + \;(x - x_0)^n\,\varepsilon(x)$$

où a_n est le premier coefficient non nul dans le développement après a_1 (qui, lui, peut être nul, la courbe ayant alors une tangente horizontale).

La mesure algébrique (mesurée sur l'axe $y'Oy$) de la distance entre le point $(x, f(x))$ de la courbe et le point de même abscisse x sur la tangente en $(x_0, f(x_0))$ est donnée par

$$f(x) - a_0 - a_1\,(x - x_0) \;=\; (x - x_0)^n \;\times\; (a_n + \varepsilon(x))$$

où $a_n + \varepsilon(x)$ tend vers $a_n \neq 0$ quand x tend vers x_0.

Au voisinage de x_0, le signe de la différence $f(x) - a_0 - a_1\,(x - x_0)$ est celui de $a_n\,(x - x_0)^n$:

- si n est pair, le signe de $a_n\,(x - x_0)^n$ est constant, égal au signe de a_n que x soit plus petit ou plus grand que x_0. Cela signifie qu'au voisinage de x_0 la courbe reste d'un même côté de la tangente en x_0. Plus précisément, la courbe est toujours au-dessus de sa tangente si $a_n > 0$ et est en-dessous si $a_n < 0$.
- si n est impair, la quantité $a_n\,(x - x_0)^n$ change de signe suivant que x est soit plus petit ou plus grand que x_0. La courbe est située d'un côté de la tangente pour $x < x_0$ et passe de l'autre côté quand $x > x_0$. On dit que la courbe présente un *point d'inflexion* en x_0.

Exemple 7.36. — Étudions la courbe représentative de $f(x) = \mathrm{ch}x - \frac{1}{2}\,x^2 - x^3$ au voisinage du point d'abscisse 0.
On a

$$\mathrm{ch}x \;=\; 1 + \frac{x^2}{2} \;+\; x^3\,\varepsilon(x) \;\text{ donc }\; f(x) \;=\; 1 - x^3 + x^3\,\varepsilon(x).$$

On en déduit qu'au point $(0, f(0)) = (0, 1)$ la courbe représentative de f a pour tangente la droite d'équation $y = 1$ et que $(0, 1)$ est un point d'inflexion pour cette courbe.

7.8.2. Position d'une courbe par rapport à ses asymptotes. — Si l'on peut écrire la fonction f sous la forme

$$f(x) \;=\; ax + b + \frac{c}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini et où la constante c est non nulle, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) et le signe de c donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Si l'on considère une asymptote comme étant une "tangente à l'infini", on retrouve bien les mêmes principes que pour la tangente à une courbe en un point x_0 fini.

Il suffit simplement ici de se ramener au voisinage de 0 en posant $y = 1/x$ et en développant $g(y) = f(1/y)$ sous la forme

$$g(y) \;=\; \frac{a}{y} + b + cy^n + y^n\,\varepsilon(y).$$

On dit que l'on a effectué un *développement asymptotique* de f en x au voisinage de l'infini.

Exemple 7.37. — Étudions l'asymptote éventuelle de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x + 3}$ et précisons la position de sa courbe représentative relativement à cette asymptote. Posons $y = 1/x$ et $g(y) = f(1/y)$. On a

$$\begin{aligned} g(y) &= y\sqrt[3]{\frac{1}{y^3} - \frac{4}{y} + 3} = \frac{y}{y}\sqrt[3]{1 - 4y^2 + 3y^3} \\ &= \left(1 - 4y^2 + 3y^3\right)^{1/3} = 1 - \frac{4}{3}y^2 + y^2\,\varepsilon(y). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(x) = x\,g\Big(\frac{1}{x}\Big) = x\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\,\eta(x)\right)$$

c'est-à-dire

$$f(x) = x - \frac{4}{3}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\,\eta(x).$$

La courbe représentative de f admet donc la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique lorsque x tend vers l'infini. De plus, en $-\infty$ cette courbe est au-dessus de l'asymptote, et en $+\infty$ elle est au-dessous.

7.9. Développements asymptotiques

On trouve dans les développements limités une idée simple, qui est l'idée de base de toute approximation : pour approcher une fonction au voisinage d'un point, il faut choisir une échelle "d'infiniment petits" (les "x^n" dans le cas des développements limités ordinaires). On écrit alors l'approximation souhaitée comme une combinaison linéaire des infiniment petits de l'échelle. Bien d'autres échelles que les "x^n" sont possibles. On peut aussi transposer la même idée pour les développements au voisinage de $+\infty$, ou encore pour des échelles d'infiniment grands. Nous ne ferons pas de théorie générale des développements asymptotiques dans ce chapitre. Nous nous contenterons d'une liste d'exemples, qui se déduisent tous par composition des développements limités ordinaires.

- **Échelle des x^α au voisinage de 0^+ :**

$$\begin{aligned} \sqrt{x + x^2} &= \sqrt{x}\,\sqrt{1+x} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \\ &= x^{1/2} + \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/2}}{8} + o(x^{5/2}). \end{aligned}$$

- **Échelle des $x^n\,(\ln x)^m$ au voisinage de 0^+ :**

On a

$$\begin{aligned} x^{x^2+x} &= \exp\big((x^2+x)\,\ln x\big) \\ &= 1 + x\,\ln x + \frac{1}{2}x^2\,(\ln x)^2 + x^2\,\ln x + \frac{1}{6}x^3\,(\ln x)^3 + x^3\,(\ln x)^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

- **Échelle des x^{-n} au voisinage de $+\infty$:**

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{1}{x}\,\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\\ &= \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}+o\Big(\frac{1}{x^5}\Big).\end{aligned}$$

• **Échelle des $e^{-\alpha x}$ au voisinage de $+\infty$:**

$$\ln(1+e^{-x}) = e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{e^{-3x}}{3}+o(e^{-3x}).$$

7.10. Exercices

Exercice 126

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3-x+2$.

1. Quel est le développement limité de f en 0 à l'ordre 3 ? à l'ordre 2 ? à l'ordre 1 ?
2. Trouver le développement limité à l'ordre 3 de f au point $x_0=2$.

Exercice 127

Soit f la fonction $x \mapsto 2-4x^2+17x^9-x^{12}$.
Sans passer par le calcul explicite des dérivées, déterminer $f^{(9)}(0)$ et $f^{(12)}(0)$ où $f^{(k)}(0)$ désigne la dérivée d'ordre k de f en 0.

Exercice 128

Soient n un entier naturel quelconque et f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Les propositions ci-dessous portent sur des développements limités d'ordre n en 0. On suppose que f est paire. On peut en déduire (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. Le développement de $1/f$ ne contient que des termes impairs.
2. Le développement de $x \mapsto f(x^3)$ ne contient que des termes impairs.
3. Le développement de $x \mapsto f(\sin x)$ ne contient que des termes pairs.
4. Le développement de $x \mapsto \sin x\, f(x)$ ne contient que des termes impairs.
5. Le développement de $x \mapsto x\,f(x)/|x|$ ne contient que des termes impairs.
6. Le développement de f'' ne contient que des termes pairs.
7. Si F est une primitive quelconque de f, le développement de F ne contient que des termes impairs.

Exercice 129

Les propositions suivantes portent sur des développements limités d'ordre n en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $e^{x-1} = x+o(x)$.
2. $e^{x-1} = e^{-1}+o(1)$.
3. $e^{x^2} = 1+x^2+o(x^3)$.
4. $e^{x^2-1} = e+ex^2+o(x^2)$.
5. $e^{(x-1)^2} = e-2ex+3ex^2+o(x^2)$.
6. $(e^x-1)^2 = x^2+2x^3+o(x^3)$.
7. $(e^x)^2-1 = o(x)$.
8. $(e^x)^2-1 = 2x+2x^2+o(x^2)$.

Exercice 130

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que $f(x)=x+x^2+o(x^4)$. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :
– La fonction f est continue en 0.
– Si f est 2 fois dérivable en 0 sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f''(0)=1$.
– La fonction $x\mapsto f(x)/x$ admet un développement limité d'ordre 3 en 0.
– La fonction $x\mapsto x^2 f(x)$ admet un développement limité d'ordre 5 en 0.
– On a $f(x^2)=x^2+x^4+o(x^6)$.
– On a $f(x^4)=o(x^4)$.
– On a $f(2x^2)\underset{0}{\sim} 2x^2$.

Exercice 131

Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0,

$$f(x)\ =\ x+x^3+o(x^3)\quad \text{et}\quad g(x)\ =\ -x+x^3+o(x^3).$$

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :
$*$ $f(x)+g(x)\ =\ o(x^2)$
$*$ $f(x)-g(x)\ =\ o(x)$
$*$ $f(x)+2g(x)\ =\ o(f(x))$
$*$ $2f(x)+g(x)\ \sim\ f(x)$
$*$ $f(x)\,g(x)\ =\ -x^2+x^6+o(x^6)$
$*$ $f^2(x)-g^2(x)\ \sim\ 4x^4$
$*$ $f^2(x)\,g(x)\ \sim\ x^3$
$*$ $f(x)\,g^2(x)\ \sim\ x^3$.

Exercice 132

On considère $f\ :\ x\mapsto 1+2x+x^2+4x^3+x^5\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\quad x\neq 0.$
Cette fonction admet-elle en 0 un développement limité à l'ordre 1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? Si oui, les décrire.

Exercice 133

Soit $f(x)\ =\ x^4\sin\left(\dfrac{2}{x^3}\right)$ si $x\neq 0$, et $f(0)=0$.
1. Montrer que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 3, dont la partie régulière est nulle.
2. Montrer que f est dérivable en 0 .
3. Montrer que la dérivée f' n'admet pas de développement limité en 0.
4. Conclusion.

Exercice 134

Montrer que $\ln x\ \underset{1}{\sim}\ x-1$ et en déduire la limite quand x tend vers 1 de la fonction $x\mapsto x^{\frac{1}{x-1}}$.

Exercice 10
Soient $f(x)=1+\frac{x}{2}+\sin^2 x$ et $g(x)=1+x$.
Montrer que $f\underset{0}{\sim} g$. A-t-on $\ln f\underset{0}{\sim}\ln g$?

Exercice 135

1. À l'aide des développements limités , montrer

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right] = \frac{1}{3}$$

2. Que pensez-vous du raisonnement suivant :
On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$, donc $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$, d'où $\frac{1}{\sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$, et par conséquent

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right] = 0\,?$$

Exercice 136

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4 \sin\left(\frac{2}{x^3}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 3, dont la partie régulière est nulle.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. Montrer que f' n'admet pas de développement limité en 0.
4. Conclusion.

Exercice 137

Établir les développements limités suivants :
$* \cos x \, \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$
$* \dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$
$* \dfrac{1}{1-\sin x} = 1 + x + x^2 + \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$
$* \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \dfrac{2x^3}{3} + o(x^4)$
$* \ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$
$* \cos(\sin x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$
$* e^{\sqrt{1+x}} = e + \dfrac{ex}{2} + \dfrac{ex^3}{48} + o(x^3)$
$* \arctan(e^x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$
$* \ln(2 + x + \sqrt{1+x}) = \ln 3 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$
$* \ln(2\cos x + \sin x) = \ln 2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{5x^2}{8} + \dfrac{5x^3}{24} + o(x^3).$

Exercice 138

Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre $2n$ en 0 suivant :

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}).$$

1. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis composer avec $x \mapsto x^2$.
2. Écrire les développements d'ordre $2n$ de $x \mapsto 1/(1-x)$ et $x \mapsto 1/(1+x)$, puis faire la demi-somme.
3. Écrire les développements d'ordre $2n$ de $x \mapsto 1/(1-x)$ et $x \mapsto 1/(1+x)$, puis faire le produit.

Exercice 139

Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre n en 0 suivant :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + o(x^n).$$

1. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha = -2$, puis composer avec la fonction $x \mapsto -x$.
2. Écrire le développement d'ordre $n+1$ de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis dériver.
3. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$ puis élever au carré.
4. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$ puis composer avec la fonction $x \mapsto 2x - x^2$.

Exercice 140

Soit n un entier naturel. Démontrer les résultats suivants :

* $\displaystyle \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} - + \ldots + \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{n+1}} + o(x^{2n})$
* $\displaystyle \frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{16} + \frac{x}{32} + \frac{3x^2}{4^4} + \ldots + \frac{(n+1)\, x^n}{4^{n+2}} + o(x^n)$
* $\displaystyle \frac{x^2}{x-4} = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{16} - \ldots - \frac{x^n}{4^{n-1}} + o(x^n)$
* $\displaystyle \frac{x}{2x^2-3x+1} = x + 3x^2 + \ldots + (-1+2^n)\, x^n + o(x^n).$

Exercice 141

On considère f donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$.
1. Montrer que f induit une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa réciproque.
2. Montrer que f^{-1} admet un développement limité de tout ordre en 0 et déterminer le développement à l'ordre 3.

Exercice 142

Le but de cet exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 suivant :

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

On notera a, b, c les réels (supposés inconnus) tels que $\arcsin x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.
1. Écrire le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ et en déduire les valeurs de a, b, c.
2. Écrire les développements limités d'ordre 4 de sinus puis de $\sin \circ \arcsin$. Retrouver les valeurs de a, b, c.
3. Écrire les développements limités d'ordre 5 en 0 de cos, puis de $\cos \circ \arcsin$, et enfin de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. En utilisant la formule $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, retrouver les valeurs de a, b, c.
4. Écrire, en fonction de a, b, c, les développements limités d'ordre 6 de la primitive de arcsin nulle en 0, ainsi que de la fonction $x \mapsto x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$. En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de a, b, c.

Exercice 143

Démontrer les résultats suivants :

$*$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \dfrac{3}{2}$

$*$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,(e^x+1)-2\,(e^x-1)}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

$*$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4} = \dfrac{1}{6}$

$*$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\,(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1} = \dfrac{1}{3}$

$*$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}$

$*$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\arctan x-x^2}{\cos(x^2)-1} = \dfrac{2}{3}$

Exercice 144

Déterminer, quand elle existe, chacune des limites suivantes

$*$ $\dfrac{\sin x - x\ \cos x}{x^2\ \sin x}$ en 0

$*$ $\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$ en 3

$*$ $\dfrac{\ln(3x^2-2)}{\sin(x-1)}$ en 1

$*$ $\left(\dfrac{3^x+4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

$*$ $\tan(3x)\,\ln(2\sin x)$ en $\frac{\pi}{6}$

Exercice 145

1. À l'aide des développements limités , montrer

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right] = \frac{1}{3}$$

2. Que pensez-vous du raisonnement suivant :

$\sin x \underset{0}{\sim} x$, donc $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$, d'où $\frac{1}{\sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$, et par conséquent

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right] = 0\ ?$$

Exercice 146

1. Montrer que

$$\tan\frac{\pi x}{4} \underset{2}{\sim} \frac{4}{\pi(2-x)}.$$

2. En déduire

$$\lim_{x\longrightarrow 2} (2^x+3^x-12)^{\tan(\frac{\pi x}{4})} = 2^{-\frac{16}{\pi}}\ 3^{-\frac{36}{\pi}}$$

Exercice 147

Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ avec $0<a<b$, et soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer qu'au voisinage de 0 on a le développement limité suivant :

$$f(x) \;=\; \sqrt{ab}\,\left[1+\frac{1}{8}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2\,x\,+\,o(x)\right].$$

3. En déduire qu'on peut prolonger f en une fonction continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.

Exercice 148

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$.
Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de ce point.

Exercice 149

Étudier l'allure de la courbe représentative de la fonction $f\;:\;x\longmapsto\frac{2x}{1+x^2}$, au voisinage de l'origine, puis au voisinage du point d'abscisse 1.

Exercice 150

Déterminer les résultats suivants qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de 0^+ :

$*\;\dfrac{1}{\sin^3(x^2)}\;=\;\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{2x^2}\,+\,o(x).$

$*\;\sqrt{x+2x^3}\;=\;x^{1/2}\,+\,x^{5/2}\,-\,\dfrac{1}{2}\,x^{7/2}\,+\,o(x^{7/2}).$

$*\;x^x\;=\;1+x\,\ln x\,+\,\dfrac{1}{2}\,x^2\,(\ln x)^2\,+\,o(x^2\,\ln x).$

Exercice 151

Démontrer les résultats suivants qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$:

$*\;\dfrac{1}{2+x}\;=\;\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+o\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$

$*\;\dfrac{1+x^2}{(1+x)\,(2-x)}\;=\;-1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}+o\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$

$*\;\dfrac{1}{x\,\sin(1/x)}\;=\;1+\dfrac{1}{6x^2}+\dfrac{7}{360x^4}+o\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big)$

$*\;\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}}\;=\;x^{5/6}-\dfrac{1}{3x^{7/6}}+\dfrac{1}{2x^{13/6}}+o\Big(\dfrac{1}{x^{13/6}}\Big)$

Exercice 152

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$\exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\;=\;\frac{1}{e}\left[1-\frac{2}{x}+\frac{2}{3x^3}\right]+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)$$

2. Qu'en déduit-on concernant la courbe représentative de la fonction $x\mapsto\exp(\frac{1+x}{1-x})$ au voisinage de $+\infty$?

Exercice 153

Pour chacune des applications f suivantes, déterminer les asymptotes de f en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que la position de la courbe par rapport à ces asymptotes :

$*\;f\;:\;x\mapsto x\,\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}.$

* $f \ :\mapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.
* $f \ : \ x \mapsto (x+1) \ \arctan x$.
* $f \ : \ x \mapsto (x+1)\, e^{1/(x+1)}$.

CHAPITRE 8

COURBES PARAMÉTRÉES PLANES

Ce chapitre de géométrie est dédié à l'étude locale et globale des courbes dites *paramétrées* dans le plan $\mathbb{R}^2$. Les développements limités y jouent un rôle fondamental, notamment dans l'étude de ces courbes au voisinage des points dits *singuliers ou stationnaires*.

8.1. Définitions et premiers exemples

Définition 8.1. — Une *courbe paramétrée plane* est une application

$$f\ :\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2\ ,\ \ t \mapsto f(t)$$

où $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$.

Ainsi, une courbe paramétrée (plane) est une application qui, à un réel t (le *paramètre*), associe *un point* du plan. On parle aussi d'*arc paramétré*. On note usuellement :

$$f\ :\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2\ ,\ \ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

où $x\ :\ \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t)$ et $y\ :\ \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ t \mapsto y(t)$ sont appelées les applications *composantes* de f.

Dans la suite, une courbe paramétrée sera souvent décrite de manière très synthétique sous la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \ln(1+t) \\ y(t) & = & 3-t^2 \end{array}\right.\quad ,\ \ t \in]-1,+\infty[.$$

Une telle écriture est appelée *une représentation paramétrique* ou encore *une paramétrisation* de la courbe. Nous en connaissons déjà quelques exemples.

Exemple 8.2. — $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos t \\ y(t) & = & \sin t \end{array}\right.\ ,\ \ t \in [0, 2\pi[$: est une paramétrisation du cercle unité (ou cercle trigonométrique).

Exemple 8.3. — $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t-2 \\ y(t) & = & 3t+1 \end{array}\right.\ ,\ \ t \in \mathbb{R}$: est une paramétrisation de la droite passant par le point $A(-2,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,3)$.

Exemple 8.4. — Si f est une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors une paramétrisation du graphe de f, c'est-à-dire de la courbe d'équation $y = f(x)$, est donnée par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & f(t) \end{array}\right.\ ,\ t \in \mathcal{D}.$$

Il est important de noter qu'une courbe paramètrée ne se réduit pas au dessin, malgré le vocabulaire utilisé, mais qu'il s'agit bien d'une *application* (qui pourra être par exemple de classe C^k sur $\mathcal{D}$, auquel cas on parlera de courbe paramétrée de classe C^k, etc).

Définition 8.5. — On appelle *support* de la courbe $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, l'ensemble des points $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où t décrit $\mathcal{D}$.

Néanmoins, par la suite, quand cela ne pose pas de problème, nous identifierons ces deux notions en employant le mot *courbe* pour désigner indifféremment à la fois l'application et son graphe.
Des courbes paramétrées différentes peuvent avoir un même support. C'est par exemple le cas des courbes :

$$[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2\ ,\ t \mapsto (\cos t, \sin t) \quad \text{et} \quad [0, 4\pi[\to \mathbb{R}^2\ ,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

dont le support est le cercle unité, parcouru une seule fois pour la première paramétrisation et deux fois pour la seconde.
Plus surprenant, la courbe

$$t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \frac{2t}{1+t^2} \right)\ ,\quad t \in \mathbb{R},$$

est une paramétrisation du cercle unité privé du point $(-1, 0)$.
Ainsi, la seule donnée du support ne suffit pas à définir un arc paramétré, qui est donc davantage qu'un simple dessin. C'est une *courbe munie d'un mode de parcours*. Sur cette courbe, on avance mais on peut aussi revenir en arrière, on peut la parcourir une ou plusieurs fois, au gré du paramètre, celui-ci n'étant d'ailleurs jamais visible sur le dessin ! On "voit" les coordonnées $x(t), y(t)$, mais pas t.

Remarque 8.6. — La cinématique est l'étude des mouvements. Le paramètre t peut s'interpréter comme *le temps* et dans ce cas, l'arc paramétré s'appelle plutôt *point en mouvement* et le support de cette courbe porte le nom de *trajectoire*. On dit alors que $M(t)$ est la *position* du point M où l'*instant* t.

8.2. Réduction du domaine d'étude

Pour étudier et tracer un arc paramétré $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, il peut s'avérer très utile de rechercher d'éventuelles propriétés de *périodicité* et de *symétries* des applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$, permettant de réduire le domaine d'étude, puis de compléter la courbe.

Périodicité :
S'il existe un nombre réel $T > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathcal{D}\ ,\ x(t+T) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t+T) = y(t),$$

alors on peut restreindre l'étude où l'intersection de $\mathcal{D}$ avec un intervalle de longueur T au choix et on obtiendra ainsi la courbe complète.

Symétries :
Rappelons tout d'abord l'effet de quelques transformations géométriques usuelles sur le point $M(x, y)$ où x et y désignent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné.

- *Translation de vecteur* $\vec{u}(a, b)$: $t_{\vec{u}}(M) = (x + a, y + b)$.

- *Réflexion d'axe* (Ox) : $s_{(Ox)}(M) = (x, -y)$.
- *Réflexion d'axe* (Oy) : $s_{(Oy)}(M) = (-x, y)$.
- *Symétrie centrale de centre* O : $s_O(M) = (-x, -y)$.
- *Symétrie centrale de centre* $I(a, b)$: $s_I(M) = (2a - x, 2b - y)$.
- *Réflexion d'axe la droite* D d'équation $y = x$: $s_D(M) = (y, x)$.
- *Réflexion d'axe la droite* D' d'équation $y = -x$: $s_{D'}(M) = (-y, -x)$.
- *Rotation d'angle* $\pi/2$ *autour de* O : $rot_{\pi/2}(M) = (-y, x)$.
- *Rotation d'angle* $-\pi/2$ *autour de* O : $rot_{-\pi/2}(M) = (y, -x)$.

On utilise ces transformations pour réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée.

Exemple 8.7. — Considérons la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - 3\cos t \end{cases}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} M(t + 2\pi) &= \big(t + 2\pi - \sin(t + 2\pi), 1 - 3\cos(t + 2\pi)\big) \\ &= (t + 2\pi - \sin t, 1 - 3\cos t) \\ &= (t - \sin t, 1 - 3\cos t) + (2\pi, 0) \\ &= t_{\vec{u}}(M(t)) \end{aligned}$$

où $\vec{u} = (2\pi, 0)$.

Donc, on étudie la courbe et on en trace le support sur un intervalle de longueur 2π au choix, comme $[-\pi, \pi]$ par exemple, puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ensuite, pour $t \in [-\pi, \pi]$, on a

$$M(-t) = \big(-(t - \sin t), 1 - 3\cos t\big) = s_{Oy}(M(t)).$$

On étudie la courbe et on en trace le support sur $[0, \pi]$, ensuite on effectue la réflexion d'axe (Oy), puis on étudie la courbe complète par translations de vecteurs $k\vec{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 8.8. — Considérons la courbe de Lissajous $\begin{cases} x(t) &= \sin(2t) \\ y(t) &= \sin(3t) \end{cases}$.

– Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M(t + 2\pi) = M(t)$, donc on obtient toute la courbe quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

– Ensuite, pour $t \in [-\pi, \pi]$, on a $M(-t) = (-\sin(2t), -\sin(3t)) = s_O(M(t))$. On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

– Enfin, pour $t \in [0, \pi]$, on a

$$M(\pi - t) = \big(\sin(2\pi - 2t), \sin(3\pi - 3t)\big) = \big(\sin(-2t), \sin(\pi - 3t)\big) = \big(-\sin(2t), \sin(3t)\big)$$

et donc

$$\forall t \in [0, \pi], \quad M(\pi - t) = s_{(Oy)}(M(t)).$$

Compte tenu de ce qui précède, on étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi/2]$, on effectue la réflexion d'axe (Oy), puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

8.3. Points simples, points multiples

Définition 8.9. — Soit $f : t \mapsto M(t)$ une courbe paramétrée et soit A un point du plan. On appelle *multiplicité* du point A par rapport à la courbe f le nombre de réels t tels que $M(t) = A$.

• Si A est atteint une et une seule fois, sa multiplicité est 1 et on dit que le point A est un *point simple* de la courbe.

• Si A est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre et deux seulement, sa multiplicité est 2 et on dit que le point A est un *point double* de la courbe.

• On parle de même de *points triples, quadruples,...*. Un point est dit multiple dès que sa multiplicité est au moins égale à 2.

• Une courbe dont tous les points sont simples est dite *courbe paramétrée simple*. Cela revient à dire que l'application $t \mapsto M(t)$ est injective.

Comment trouver les éventuels points multiples ?

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto M(t)$ une courbe paramétrée. Pour trouver les éventuels points multiples de cette courbe, on cherche les couples $(t, u) \in \mathcal{D}^2$ tels que

$$\begin{cases} M(t) & = & M(u) \\ t > u & & \end{cases}$$

On se limite au couple (t, u) avec $t > u$ afin de ne pas compter la solution redondante (u, t) en plus de (t, u).

Exemple 8.10. — Recherchons les points multiples de la courbe $\begin{cases} x(t) & = & t^2 + t \\ y(t) & = & t^3 + t^2 \end{cases}$.

Il s'agit de trouver $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} t^2 + t & = & u^2 + u \\ t^3 + t^2 & = & u^3 + u^2 \\ t > u & & \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned}
\begin{cases} t^2 + t & = & u^2 + u \\ t^3 + t^2 & = & u^3 + u^2 \\ t > u & & \end{cases}
&\iff \begin{cases} t^2 - u^2 & = & u - t \\ t^3 - u^3 & = & u^2 - t^2 \\ t > u & & \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (t-u)\,(t+u) & = & u - t \\ (t-u)\,(t^2 + tu + u^2) & = & (u-t)\,(u+t) \\ t > u & & \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t + u & = & -1 \\ t^2 + tu + u^2 & = & -t - u \\ t > u & & \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t + u & = & -1 \\ (t+u)^2 - tu & = & 1 \\ t > u & & \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t + u & = & -1 \\ tu & = & 0 \\ t > u & & \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système considéré possède une seule solution : $(0, -1)$. L'arc paramétré considéré possède donc un unique point double, le point $M(0) = M(-1) = (0, 0)$.

8.4. Tangente à une courbe paramétrée

8.4.1. Tangente à une courbe. — Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ t \mapsto M(t)$ une courbe. Soit $t_0 \in \mathcal{D}$. On se propose de définir la notion fondamentale de tangente à la courbe au point $M(t_0)$.

On doit d'abord prendre garde au fait que lorsque ce point $M(t_0)$ est un point multiple de la courbe, alors la courbe peut avoir plusieurs "tangentes" en ce point. Pour éviter cela, on supposera que la courbe est *localement simple en* t_0, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert non vide I de centre t_0 tel que l'équation $M(t) = M(t_0)$ admette une et une seule solution dans $\mathcal{D} \cap I$, à savoir $t = t_0$. Il revient au même de dire que l'application $t \mapsto M(t)$ est localement injective. Dans tout ce paragraphe nous supposerons systématiquement que cette condition est réalisée.

Définition 8.11. — Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto M(t)$ une courbe paramétrée et soit $t_0 \in \mathcal{D}$. On suppose que la courbe est localement simple en t_0. On dit que la courbe admet une tangente en $M(t_0)$ si la droite $(M(t)M(t_0))$ admet une position limite quand t tend vers t_0. Dans ce cas, la droite limite est appelée *la tangente* à la courbe au point $M(t_0)$.

8.4.2. Vecteur dérivé. — On sait déjà que la tangente en $M(t_0)$, quand elle existe, passe par le point $M(t_0)$. Il reste donc à préciser sa direction.
Pour $t \neq t_0$, un vecteur directeur de la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ est le vecteur

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix}.$$

Rappelons que ce vecteur est supposé non nul pour t proche de t_0 et distinct de t_0. Quand t tend vers t_0, les coordonnées de ce vecteur tendent vers 0, autrement dit le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ tend hélas vers $\vec{0}$.

Définition 8.12. — Soit $t \mapsto M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, une courbe paramétrée et soit $t_0 \in \mathcal{D}$. On dit que la courbe est *continue en* t_0 si les fonctions x et y sont continues en t_0. La courbe est dite *continue sur* $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

Revenons à notre tangente.
Pour $t \neq t_0$, un autre vecteur directeur de la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ est le vecteur

$$\frac{1}{t - t_0}\ \overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \begin{pmatrix} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \end{pmatrix}.$$

Définition 8.13. — Soit $t \mapsto M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, une courbe paramétrée et soit $t_0 \in \mathcal{D}$. On dit que la courbe est *dérivable en* t_0 si les fonctions x et y sont dérivables en t_0. Dans ce cas, le *vecteur dérivé* de la courbe en t_0 est le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$.
Ce vecteur est noté $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0)$.

8.4.3. Tangente en un point régulier. — Si le vecteur dérivé $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0)$ est non nul, celui-ci indique effectivement la direction limite de la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ quand t tend vers t_0.
Nous étudierons plus tard le cas où le vecteur dérivé est nul.

Définition 8.14. — Soit $t \mapsto M(t)$, $t \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ une courbe dérivable sur $\mathcal{D}$ et soit $t_0 \in \mathcal{D}$.
— Si $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point $M(t_0)$ est *régulier*.

— Si $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) = \vec{0}$, on dit que le point $M(t_0)$ est *singulier.*

— Une courbe dont tous les points sont réguliers est dite *courbe régulière.*

Interprétation cinématique. Si t est le temps, le vecteur dérivé $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0)$ est le *vecteur vitesse* au point $M(t_0)$. Un point singulier, c'est-à-dire un point en lequel la vitesse est nulle, s'appellera alors plus volontiers *point stationnaire.* D'un point de vue cinématique, il est logique que le vecteur vitesse en un point, quand il est non nul, dirige la tangente à la trajectoire en ce point. C'est ce qu'exprime le résultat suivant, qui découle directement de notre étude du vecteur dérivé.

Proposition 8.15. — *En tout point régulier d'une courbe dérivable, cette courbe admet une tangente. De plus, cette tangente est dirigée par le vecteur dérivé en ce point.*

Compte tenu de ce résultat, on voit bien que si $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$, une équation de la tangente T_0 en $M(t_0)$ est donc donnée par

$$M(x,y) \in T_0 \iff \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$M(x,y) \in T_0 \iff y'(t_0)\big(x - x(t_0)\big) - x'(t_0)\big(y - y(t_0)\big) = 0. \tag{8.4.1}$$

Exemple 8.16. — Reprenons le courbe de Lissajous $\begin{cases} x(t) &= \sin(2t) \\ y(t) &= \sin(3t) \end{cases}$ $t \in [-\pi, \pi]$.
Montrons qu'elle est régulière et recherchons les éventuels points où la tangente est verticale.
On a vu à l'exemple 1.2.2 que, par symétries, on peut restreindre notre étude à $[0, \pi/2]$.
Au point $M(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$, le vecteur dérivée est

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix}.$$

Or, pour $t \in [0, \pi/2]$, on a

$$x'(t) = 0 \iff 2\cos(2t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{4}$$

et

$$y'(t) = 0 \iff 3\cos(3t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{6} \text{ ou } t = \frac{\pi}{2}.$$

Les deux coordonnées du vecteur dérivé ne s'annulent jamais en même temps, ce qui prouve que tous les points de la courbe sont réguliers, et le vecteur dérivé dirige la tangente.
D'après (10.1), la tangente en un point $M(t_0)$ est verticale lorsque $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, autrement dit ici en $M(\pi/4)$.
On trouve les autres tangentes verticales par symétrie.

8.5. Étude locale d'une courbe paramétrée

On considère une courbe paramétrée $I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ où I est supposé ici un intervalle ouvert. Soit $t_0 \in I$. On se propose d'étudier cette courbe au voisinage du point $M(t_0)$.
Nous supposerons que les composantes $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ possèdent sur I autant de dérivées $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ qu'il sera nécessaire.
On note $\overrightarrow{M^{(k)}(t)}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(t) \end{pmatrix}$.
La formule de Taylor-Young en t_0 pour les fonctions x et y donne :

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + \frac{h}{1!}\, x'(t_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\, x^{(n)}(t_0) + \varepsilon_1(h)\, h^n$$

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \frac{h}{1!}\, y'(t_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\, y^{(n)}(t_0) + \varepsilon_2(h)\, h^n$$

où $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 quand h $(h \neq 0)$ tend vers 0.
En fait, il est commode de regrouper les deux formules ci-dessus sous forme d'une seule formule dite *formule de Taylor-Young vectorielle* :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0 + h)} = \frac{h}{1!}\, \overrightarrow{M'(t_0)} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\, \overrightarrow{M^{(n)}(t_0)} + h^n\, \overrightarrow{\varepsilon(h)}$$

où le vecteur $\overrightarrow{\varepsilon(h)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_2(h) \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quand h tend vers 0.

Exemple 8.17. — Écrivons la formule de Taylor-Young vectorielle à l'ordre 2 en $t_0 = 1$ pour l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = t^3 - t \\ y(t) = e^t \end{cases}$

On a $M(t_0) = M(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, et comme $x'(t) = 3t^2 - 1$, $y'(t) = e^t$, $x''(t) = 6t$ et $y''(t) = e^t$, on en déduit que $\overrightarrow{M'}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M''}(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ e \end{pmatrix}$. D'où

$$x(1 + h) = 2\,h + 3\,h^2 + \varepsilon_1(h)\, h^2$$

et

$$y(1 + h) = e + e\,h + \frac{e}{2}\, h^2 + \varepsilon_2(h)\, h^2$$

ce qui donne vectoriellement :

$$\overrightarrow{M(1)M(1 + h)} = h \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ e \end{pmatrix} + \overrightarrow{\varepsilon(h)}\, h^2.$$

Ceci étant, nous supposerons (ce qui sera le cas usuel) que les vecteurs dérivés successifs $\overrightarrow{M^{(k)}(t_0)}$ ne sont pas tous nuls. On pose alors

$$p = \min \left\{ k \in \mathbb{N}^* \,,\ \overrightarrow{M^{(k)}(t_0)} \neq \vec{0} \right\}. \tag{8.5.1}$$

Exemple 8.18. — Dans l'exemple précédent, on a $\overrightarrow{M'(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $p = 1$.

Définition 8.19. — Avec l'entier $p \geqslant 1$ défini précédemment, le vecteur $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$ est appelé *vecteur tangent* où la courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ au point $M(t_0)$.

La droite passant par le point $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$ s'appelle *la tangente à la courbe au point* $M(t_0)$.

Remarque 8.20. — Les définitions 1.5.3 généralisent, au cas où p n'est plus nécessairement égal à 1, celles de la définition 1.4.2 et la proposition 1.4.8.

Exemple 8.21. — Considérons la courbe $\begin{cases} x(t) &= e^t - t \\ y(t) &= t^3 - t^2 \end{cases}$ et déterminons sa tangente au point $M(0)$.
On a $x'(t) = e^t - 1$, $y'(t) = 3t^2 - 2t$, $x''(t) = e^t$ et $y''(t) = 6t - 2$. On en déduit que $\overrightarrow{M'(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M''(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Un vecteur tangent à la courbe en $M(0)$ est donc donné par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La tangente à la courbe au point $M(0)$ est donc la droite passant par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Remarque 8.22. — Le recours aux développements limités permet d'éviter les calculs parfois fastidieux des dérivées successives $x^{(k)}(t_0)$ et $y^{(k)}(t_0)$.

Soit $p \geqslant 1$ l'entier défini en (10.2), et notons q le premier entier strictement supérieur à p tel que les vecteurs $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$ et $\overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}$ ne soient pas colinéaires. En d'autres termes

$$q = \min \left\{ k > p\ ,\ \overrightarrow{M^{(k)}(t_0)} \neq \lambda\, \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \tag{8.5.2}$$

Exemple 8.23. — Calculons les entiers p et q pour la courbe $\begin{cases} x(t) &= e^t - t \\ y(t) &= t^2 - t^3 \end{cases}$.
Pour cela, nous allons calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction vectorielle $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t - t \\ t^2 - t^3 \end{pmatrix}$.
Il suffit de déterminer le développement limité en 0 des fonctions $x : t \mapsto e^t - t$ et de $y : t \mapsto t^2 - t^3$. Or au voisinage de $t = 0$, on a

$$x(t) = e^t - t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\, \varepsilon_1(t)$$

et

$$y(t) = t^2 - t^3.$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit que

$$\overrightarrow{M'(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \overrightarrow{M''(0)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ \overrightarrow{M'''(0)} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On en conclut aussitôt que $p = 2$, et comme de plus on a

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \neq 0,$$

alors les vecteurs $\overrightarrow{M''(0)}$ et $\overrightarrow{M'''(0)}$ ne sont pas colinéaires, et par conséquent $q = 3$.

Dans toute la suite, on note

$$\vec{u} = \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{M^{(q)}(t_0)}$$

où p et q sont les entiers strictement positifs définis précédemment.
Par définition de p et q, il existe des constantes réelles $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-1}$ telles que

$$\overrightarrow{M^{(k)}(t_0)} = \lambda_k \vec{u}\,, \quad \text{pour } p+1 \leqslant k \leqslant q-1.$$

La formule de Taylor-Young au voisinage de t_0 s'écrit donc

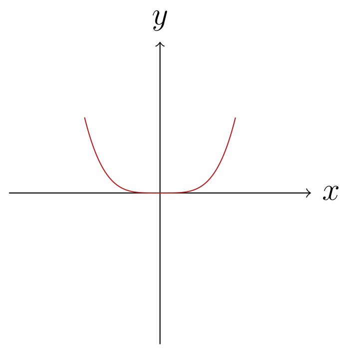
$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = h^p \left(\frac{1}{p!} + \frac{\lambda_{p+1}}{(p+1)!}\, h + \ldots + \frac{\lambda_{q-1}}{(q-1)!}\, h^{q-p-1}\right) \vec{u} + \frac{h^q}{q!}\,\vec{v} + h^q\, \overrightarrow{\varepsilon(h)}$$

où $\overrightarrow{\varepsilon(h)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lorsque h ($h \neq 0$) tend vers 0.
Pour étudier la courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ au voisinage du point $M(t_0)$, on se place dans le repère $\big(M(t_0), \vec{u}, \vec{v}\big)$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent les vecteurs non colinéaires définis précédemment.

Proposition 8.24. — *La position de la courbe paramétrée au voisinage du point $M(t_0)$ dépend du couple (p, q) défini précédemment.*

- *Si p impair et q pair :*

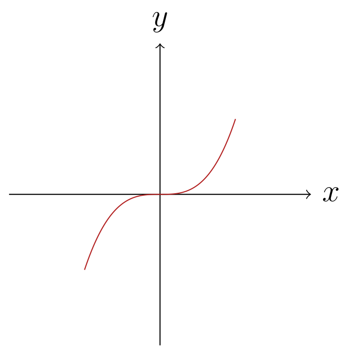
La courbe reste d'un même côté de sa tangente (le côté indiqué par $\vec{v}$) :



On dit que la courbe admet en $M(t_0)$ un point d'allure ordinaire.

- *Si p impair et q impair :*

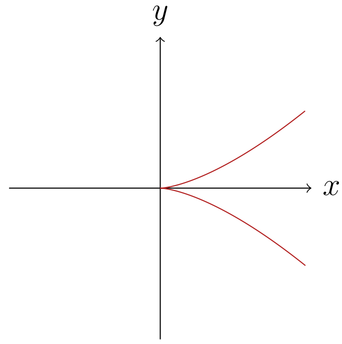
La courbe traverse sa tangente en $M(t_0)$:



On dit que la courbe présente en $M(t_0)$ un point d'inflexion.

- *Si p pair et q impair :*

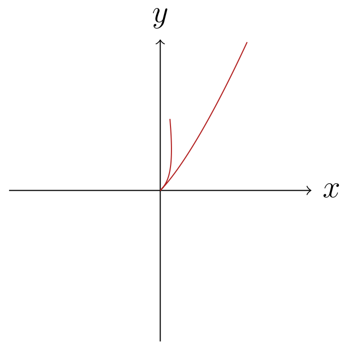
La courbe traverse sa tangente en $M(t_0)$, mais en restant d'un même côté de $\vec{v}$ (le côté indiqué par $\vec{u}$) :



On dit alors que la courbe présente en $M(t_0)$ un rebroussement de première espèce.

- *Si p pair et q pair :*

La courbe reste d'un même côté de $\vec{v}$ mais sans traverser la tangente en ce point :



On dit que la courbe admet en $M(t_0)$ un rebroussement de seconde espèce.

Démonstration. — On va utiliser l'expression suivante de la formule de Taylor-Young obtenue ci-dessus :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = h^p \left(\frac{1}{p!} + \frac{\lambda_{p+1}}{(p+1)!}\, h + \ldots + \frac{\lambda_{q-1}}{(q-1)!}\, h^{q-p-1} \right) \vec{u} + \frac{h^q}{q!}\, \vec{v} + h^q\, \overrightarrow{\varepsilon(h)}.$$

Si (α, β) sont les coordonnées du point $M(t_0+h)$ dans le repère $\big(M(t_0), \vec{u}, \vec{v}\big)$, on a d'après la formule ci-dessus :

$$\alpha = \frac{h^p}{p!}\, \big(1 + \varepsilon_1(h)\big) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{h^q}{q!}\, \big(1 + \varepsilon_2(h)\big)$$

où $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_1(h)$ tendent vers 0 quand h tend vers 0.
On observe alors que quand h passe par 0 du négatif au positif (de gauche à droite), alors d'après la formule ci-dessus, pour h assez petit, α a le signe de h^p tandis que β a le signe de h^q, ce qui selon les parités de p et q, fournit les quatre cas analysés dans la proposition. □

Remarque 8.25. — Intuitivement, on ne peut rencontrer des points de rebroussement qu'en un point singulier, car en un point où la vitesse est non nulle, on continue son chemin dans le même sens.

Exemple 8.26. — Considérons la courbe paramétrée $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & (t+1)\, e^t \\ y(t) & = & t^2\, e^t \end{array} \right.$.
Montrons qu'elle admet un unique point singulier et étudions son allure au voisinage de ce point.

Par définition, les points singuliers de la courbe sont les points de paramètre t solution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 0 \end{array} \right.$.

Ici les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{cases} x'(t) &= (t+2)\,e^t \\ y'(t) &= (t^2+2t)\,e^t \end{cases}.$$

Comme $e^t > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{cases} x'(t) &= 0 \\ y'(t) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (t+2) &= 0 \\ t\,(t+2) &= 0 \end{cases} \iff t = -2.$$

La courbe admet donc un unique point singulier, le point $M(-2) = \begin{pmatrix} -e^{-2} \\ 4e^{-2} \end{pmatrix}$. Pour étudier l'allure de la courbe au voisinage de ce point, il nous faut déterminer les entiers p et q correspondants.
Pour t au voisinage de -2, on a les développements limités :

$$x(t) \;=\; -e^{-2} + \frac{e^{-2}}{2}(t+2)^2 + \frac{e^{-2}}{3}(t+2)^3 + o((t+2)^3),$$

$$y(t) \;=\; 4e^{-2} - e^{-2}\,(t+2)^2 - \frac{e^{-2}}{3}(t+2)^3 + o((t+2)^3).$$

On a donc

$$\overrightarrow{M''(-2)} = \frac{e^{-2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M'''(-2)} = \frac{e^{-2}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit d'abord que $p = 2$, et comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

les vecteurs $\overrightarrow{M''(-2)}$ et $\overrightarrow{M'''(-2)}$ sont non colinéaires, donc $q = 3$.
D'après la proposition précédente, on conclut que la courbe présente en $M(-2)$ un point de rebroussement de première espèce.

8.6. Branches infinies et asymptotes

Dans ce paragraphe, la courbe $f \;:\; t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ cette courbe et t_0 désigne l'une des bornes de I et n'appartient pas à I (t_0 est soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$).

Définition 8.27. — On dit que la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ admet une *branche infinie* en t_0 dès que l'une au moins des deux fonctions $t \mapsto |x(t)|$ ou $t \mapsto |y(t)|$ tend vers l'infini quand t tend vers t_0.

Pour chaque branche infinie, on cherche s'il existe une *asymptote*, c'est-à-dire une droite qui "approxime" cette branche infinie.
On dit qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est dite *asymptote* à $\mathcal{C}$ si $y(t) - \big(ax(t) + b\big) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

— Si, quand t tend vers t_0, $x(t)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) et $y(t)$ tend vers un réel ℓ, la droite d'équation $y = \ell$ est dite *asymptote horizontale* à $\mathcal{C}$.

— Si, quand t tend vers t_0, $x(t)$ tend vers un réel ℓ et $y(t)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est dite *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$.

— Si, , quand t tend vers t_0, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$ (ou $-\infty$), il faut affiner l'étude.

Définition 8.28. — Si, quand t tend vers t_0, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$ (ou $-\infty$), et si

1. $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers un réel *non nul* a,
2. $y(t) - a\,x(t)$ tend vers un réel b (nul ou pas),

alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* à la courbe $\mathcal{C}$.

Remarque 8.29. — Une branche infinie peut ne pas avoir d'asymptote. On est alors en présence des cas suivants :

— Si, quand t tend vers t_0, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$ (ou $-\infty$), et si $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), on dit que $\mathcal{C}$ admet une *branche parabolique* dans la direction Oy.

— Si, quand t tend vers t_0, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$ (ou $-\infty$), et si $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0, on dit que $\mathcal{C}$ admet une *branche parabolique* dans la direction Ox.

Exemple 8.30. — Étudions les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x(t) &= t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) &= t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

Cette courbe paramétrée est définie sur $]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$. On a

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} y(t) = +\infty$$

et de plus,

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1 \ \text{ et } \ \lim_{t\to-\infty} y(t) - x(t) = 0.$$

On en conclut que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ quand t tend vers $-\infty$.

On obtient le même résultat en $+\infty$, c'est-à-dire que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ également en $+\infty$.

Examinons ce qui se passe quand t tend vers 0.

On a

$$\lim_{t\to0^-} x(t) = -\infty \ , \ \lim_{t\to0^-} y(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = -\infty.$$

On obtient également :

$$\lim_{t\to0^+} x(t) = +\infty \ , \ \lim_{t\to0^+} y(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty.$$

On conclut que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction Oy lorsque t tend vers 0.

8.7. Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Pour la construction d'une courbe paramétrée $f : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, on procède de la manière suivante :

1. *Domaine de définition de la courbe :*

C'est l'intersection des domaines de définition des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$. Une fois précisé, on détermine ensuite un *domaine d'étude :* grâce aux éventuelles symétries, périodicités...

2. *Vecteur dérivé :*

On calcule les dérivées des composantes de $t \mapsto M(t)$. Les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$ fournissent les points à tangente verticale tandis que les valeurs de t pour lesquelles $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ fournissent les points à tangente horizontale. Enfin, les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = y'(t) = 0$ fournissent les points singuliers qu'on examinera un à un par la suite.

3. *Tableau de variations conjointes :*

L'étude de x' et y' permet de connaître les variations de x et y. On reporte alors les résultats des variations conjointes des fonctions x et y dans un tableau de la forme :

t	
$x'(t)$	
x	
y	
$y'(t)$	

Ce tableau consigne les variations des deux fonctions x et y simultanément. Il nous montre l'évolution du point $M(t)$. Ainsi, pour une valeur de t donnée, on doit lire verticalement les résultats concernant à la fois x et y.

4. *Étude aux points singuliers :*

On effectue une étude locale comme indiqué au paragraphe 1.5.

5. *Étude des branches infinies :*

On procède comme indiqué au paragraphe 1.6

6. *Construction de la courbe :*

On place un repère orthonormé. On construit ensuite toutes les droites asymptotes. On place ensuite les points importants avec leur tangente (points à tangente horizontale, verticale, points singuliers, points d'intersection avec une doite asymptote, ...). On passe alors à la construction effective de la courbe grâce aux règles suivantes :

– Si x croît et y croît, on va vers la droite et vers le haut.
– Si x croît et y décroît, on va vers la droite et vers le bas.
– Si x décroît et y croît, on va vers la gauche et vers le haut.
– Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas.

7. *Les points multiples :*

Si la construction de la courbe laisse apparaître des points multiples, alors on cherche à déterminer leurs coordonnées précises en suivant la démarche indiquée au paragraphe ? ?

Exemple 8.31. — Construisons la courbe $\mathcal{C}$: $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 2t + \frac{1}{2t+1} \\ y(t) & = & t^2 - \frac{1}{2t+1}. \end{array} \right.$

Le domaine de définition de $\mathcal{C}$ est $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Il n'y a pas de symétrie évidente ni de périodicité. Le domaine d'étude de la courbe est donc le même que son domaine de définition.

Variations de x et de y :

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$, et on a

$$x'(t) = \frac{2t\,(t+1)}{(2t+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{2t\,(t+1)\,(4t^2+1)}{(2t+1)^2}.$$

On en déduit facilement que :

• $x'(t) = 0 \iff t = 0 \ \text{ou} \ t = -1.$

• $x'(t) \geqslant 0 \iff t \in]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$.
• $y'(t) = 0 \iff t = -1$.
• $y'(t) \geqslant 0 \iff t \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
– Branches infinies :
On a

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} 2t = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} t^2 = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{2t} = -\infty.$$

Donc, quand t tend vers $-\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dans la direction Oy.
Quand t tend vers $+\infty$, on obtient de la même façon que la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dans la direction Oy.
Examinons à présent ce qui se passe quand le paramètre t tend vers $-1/2$. On a

$$\lim_{t\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} x(t) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} y(t) = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{t\to-\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$$

et

$$\lim_{t\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} y(t) + x(t) = \lim_{t\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} 2t + t^2 = -\frac{3}{4}.$$

On en déduit que, quand t tend vers $\left(-\frac{1}{2}\right)^-$, la courbe $\mathcal{C}$ admet l'asymptote oblique d'équation $y = -x - \frac{3}{4}$.
Des calculs analogues permettent de voir que, quand t tend vers $\left(-\frac{1}{2}\right)^+$, la courbe $\mathcal{C}$ admet le droite d'équation $y = -x - \frac{3}{4}$ comme asymptote.
Étudions la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote oblique :
La position est donnée par le signe de $y(t) - \left(-x(t) - 3/4\right)$. Or

$$y(t) - \left(-x(t) - \frac{3}{4}\right) = t^2 + 2t + \frac{3}{4}.$$

L'étude du signe du trinôme du second degré montre alors que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'asymptote lorsque t tend vers $\left(-\frac{1}{2}\right)^+$ et en-dessous quand t tend vers $\left(-\frac{1}{2}\right)^-$.
– Recherche de points singuliers :
Il s'agit de rechercher les éventuels points $M(t)$ pour lesquels $x'(t) = y'(t) = 0$. D'après les calculs précédemment effectués pour $x'(t)$ et $y'(t)$, on sait déjà que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point singulier, le point $M(-1)$.
Au voisinage de $t = -1$, on a les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} x(t) &= -3 - 4(t+1)^2 - 8(t+1)^3 + o\left((t+1)^3\right) \\ y(t) &= 2 + 5(t+1)^2 + 8(t+1)^3 + o\left((t+1)^3\right). \end{aligned}$$

La formule de Taylor-Young vectorielle au point $M(-1)$ s'écrit donc

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (t+1)^2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + (t+1)^3 \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o\left(t+1)^3\right) \\ o\left(t+1)^3\right) \end{pmatrix}.$$

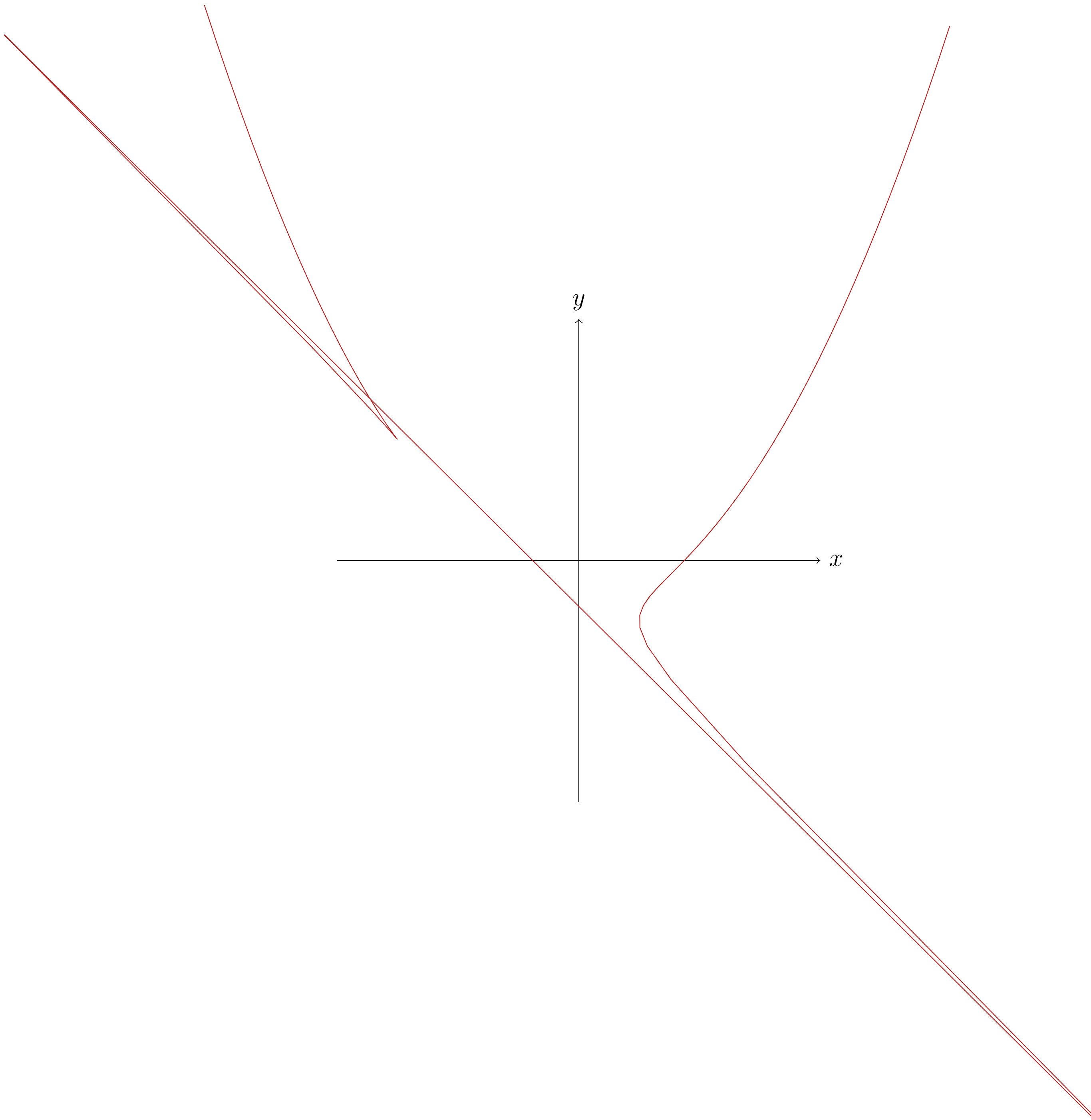
On en déduit aussitôt que $p = 2$, et comme de plus, on a

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

les vecteurs $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, et par conséquent $q = 3$.
On conclut que la courbe $\mathcal{C}$ admet en $M(-1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ un point de rebroussement de première espèce.
Observons enfin que $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 2 \neq 0$, donc la courbe admet une tangente verticale au point $M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Nous sommes maintenant en mesure de tracer la courbe $\mathcal{C}$.
Compte tenu des calculs précedents, on a le tableau suivant des variations conjointes :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘ -1	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$			

En appliquant la méthode indiquée au paragraphe 1.7, on obtient le tracé ci-dessous :



8.8. Étude métrique des courbes planes

Cette section est consacrée à un nouvel aspect de l'étude des courbes paramétrées planes : *l'aspect métrique*. Ainsi, le principal objectif de ce qui va suivre est d'apprendre à calculer la longueur d'une courbe. Nous pousserons l'étude jusqu'à la définition et le calcul de notions plus géométriques, notamment celle de *courbure* qui sera l'aboutissement de ce chapitre.

Rappelons qu'un arc de classe C^k ($k \geqslant 1$) est une application $f : I \to \mathbb{R}^2$ dont les deux composantes x et y sont des fonctions réelles de classe C^k sur I.

Définition 8.32. — Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^k ($k \geqslant 1$).
On appelle *changement de paramétrage* (de classe C^k) de f toute application $\varphi : J \to I$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que
$*$ φ est de classe C^k sur J,
$*$ φ est bijective,
$*$ φ^{-1} est de classe C^k sur I.
On appelle *paramétrage admissible* (de classe C^k) de f toute application $g : I \to \mathbb{R}^2$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un changement de paramétrage (de classe C^k) φ de f tel que $g = f \circ \varphi$.

Remarque 8.33. — 1) Si $f : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe C^k, et si $\varphi : J \to I$ est un changement de paramétrage (de classe C^k) de f, alors les arcs paramétrés f et $f \circ \varphi$ ont le même support.
2) On dit que deux arcs paramétrés f et g de classe C^k, sont C^k-*équivalents* s'il existe un changement de paramétrage (de classe C^k) φ tel que $g = f \circ \varphi$.
La relation "être C^k-équivalent à " dans l'ensemble des arcs paramétrés de classe C^k est une relation d'équivalence, et on peut considérer q'une courbe de classe C^k du plan est en fait une classe d'équivalence pour cette relation d'équivalence.
3) Avec les notations de la définition précédente, φ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Si φ est strictement croissante (resp. décroissante), on dit que les arcs paramétrés f et $f \circ \varphi$ sont *de même sens* (resp. *de sens contraires*).

Exemple 8.34. — Le paramétrage le plus classique du cercle trigonométrique est donné par

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 , \quad t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big).$$

Mais on peut également choisir le paramétrage :

$$g : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 , \quad t \mapsto \big(\cos(2t), \sin(2t)\big),$$

pour lequel on parcour bien le même cercle, mais deux fois plus vite.

Définition 8.35. — Un arc $f : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 est dit *régulier* si le vecteur

$$\overrightarrow{f'(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = (x'(t), y'(t))$$

ne s'annule en aucun point de I.
Si f est de classe C^2, on dit que cet arc est *birégulier* si le vecteur $\overrightarrow{f'(t)}$ et le vecteur

$$\overrightarrow{f''(t)} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t) = (x''(t), y''(t))$$

forment une base de $\mathbb{R}^2$ en tout point de I.

Remarque 8.36. — La birégularité implique évidemment la régularité. En particulier, un arc birégulier ne présente que des points d'allure ordinaire.

Proposition 8.37. — *La notion de birégularité est indépendante du changement de paramétrage.*

Démonstration. — Montrons-le d'abord pour la régularité :
Si on pose $g = f \circ \varphi$, en notant (x, y) les composantes de f, et (u, v) celles de g, alors on a

$$u' = (x \circ \varphi)' = \varphi' \times (x' \circ \varphi) \quad \text{et} \quad v' = (y \circ \varphi)' = \varphi' \times (y' \circ \varphi).$$

Comme φ' ne peut pas s'annuler (sinon sa réciproque ne serait pas de classe C^k sur I), on a

$$(u'(t), v'(t)) = (0,0) \iff \big(x'(\varphi(t)), y'(\varphi(t))\big) = (0,0).$$

Il est alors clair que s'il y a un point singulier pour un paramétrage, il y en a aussi un pour l'autre (pas nécessairement pour la même valeur du paramètre, bien sûr).

– Montrons maintenant la birégularité :

On a

$$u'' = \varphi'' \times (x' \circ \varphi) + \varphi'^2 \times (x'' \circ \varphi)$$

et

$$v'' = \varphi'' \times (y' \circ \varphi) + \varphi'^2 \times (y'' \circ \varphi).$$

Après développements et simplifications, on obtient facilement

$$\begin{aligned} \det\big((u', v'); (u'', v'')\big) &= u'v'' - u''v' \\ &= \varphi'^3 \times \det\big((x' \circ \varphi, (y' \circ \varphi); (x'' \circ \varphi, y'' \circ \varphi)\big). \end{aligned}$$

On observe alors que s'il y a un point qui n'est pas birégulier pour un des paramétrages, ce sera également le cas pour l'autre. □

Définition 8.38. — On appelle *la longueur* de l'arc paramétré $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ le nombre réel

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\overrightarrow{f'(t)}\| \, dt. \tag{8.8.1}$$

Remarque 8.39. — Cette notion est elle aussi indépendante du paramétrage admissible choisi. Cela découle d'une application immédiate de la formule de changement de variable pour les intégrales. En effet, d'après les calculs effectués dans la démonstration précédente, on a $\|\overrightarrow{g'(t)}\| = |\varphi'(t)| \, \|\overrightarrow{f'(\varphi(t))}\|$.

Exemple 8.40. — Calculons la longueur du cercle trigonométrique.

Si on prend le paramétrage usuel $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, on a aussitôt $\overrightarrow{f'(t)} = (-\sin(t), \cos(t))$ qui est toujours de norme 1. On retrouve bien la longueur du cercle unité :

$$L = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

Si maintenant on prend le paramétrage $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$, alors il vient $\overrightarrow{g'(t)} = (-2\sin(t), 2\cos(t))$ qui est toujours de norme 2 et on a

$$\int_0^{\pi} 2 \, dt = 2\pi,$$

ce qui nous redonne bien la longueur du cercle trigonométrique.

Remarque 8.41. — Lorsque la courbe $\mathcal{C}$ est donnée par un paramétrage cartésien

$$I \to \mathbb{R}^2\ ,\ \ t \mapsto \big(x(t), y(t)\big),$$

la formule (10.4) s'écrit alors

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt.$$

Exemple 8.42. — Calculons la longueur d'un astéroïde paramétré par

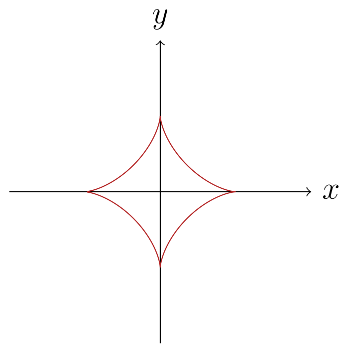
$$[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\ ,\ \ t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t)).$$

On commence par constater que, par symétrie, la longueur totale de la courbe sera égale à quatre fois la longueur obtenue sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ (théoriquement, on devrait calculer sur l'intervalle ouvert puisque les points aux bornes sont des points singuliers, mais cela ne change rien au calcul de l'intégrale). Cela étant, on a

$$x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9\sin^2(t)\cos^4(t) + 9\cos^2(t)\sin^4(t)}\,dt \\ &= 12\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)\big(\cos^2(t)+\sin^2(t)\big)}\,dt \\ &= 12\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(t)\,dt = 6\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt \\ &= 3\big[-\cos(2t)\big]_0^{\pi/2} = 3\,(1+1) = 6. \end{aligned}$$



Remarque 8.43. — Si la courbe est donnée comme graphe d'une fonction

$$f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}\,,\quad x \mapsto y = f(x),$$

alors sa longueur est donnée par la formule

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

En effet, via le paramétrage

$$t \mapsto x(t) = t \quad \text{et} \quad t \mapsto y(t) = f(t) = f(x)$$

on aura $x'(t) = 1$ et $y'(t) = f'(x)$, et par conséquent

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Exemple 8.44. — La longueur L d'un arc de parabole d'équation $y = x^2$ entre ses points d'abscisse 0 et d'abscisse 2 est donnée par

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$$

et une intégration par parties permet de voir que

$$L = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\operatorname{Argsh}(4) = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17}).$$

Paramétrisation à l'aide de l'abscisse curviligne

Définition 8.45. — Un paramétrage $f : I \to \mathbb{R}^2$ est dit *normal* si $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = 1$ en tout point t de I.

Remarque 8.46. — Un paramétrage normal d'une courbe est tout simplement un paramétrage pour lequel on parcourt cette courbe à vitesse constante égale à 1.

Définition 8.47. — Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage d'une courbe $\mathcal{C}$. On appelle *abscisse curviligne* sur $\mathcal{C}$, toute application $s : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur I telle que

$$\forall t \in I\ ,\ \ s'(t) \ = \ \|f'(t)\|.$$

Remarque 8.48. — Puisque l'application $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|f'(t)\|$ est continue sur I, une application $s : I \to \mathbb{R}$ est une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$ s'il existe $t_0 \in I$ tel que

$$\forall t \in I\ ,\ \ s(t) \ = \ \int_{t_0}^{t} \|\overrightarrow{f'(u)}\|\, du.$$

Ainsi, un arc paramétré $\mathcal{C}$ admet une infinité d'abscisses curvilignes, qui se déduisent de l'une d'entre elles par addition d'une constante.

Définition 8.49. — On appelle *paramétrage normal* de d'un arc paramétré f de classe C^1 tout paramétrage admissible $g : J \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tel que

$$\forall t \in J\ ,\ \ \|g'(u)\| \ = \ 1.$$

Proposition 8.50. — *Si f est un arc paramétré régulier, alors*
- *pour toute abscisse cirviligne s sur $\mathcal{C}$, $f \circ s^{-1}$ est un paramétrage normal de f,*
- *pour tout paramétrage normal g de f, il existe une abscisse curviligne s de $\mathcal{C}$ telle que*

$$g \ = \ f \circ s^{-1} \quad \text{ou} \quad g \ = \ f \circ (-s)^{-1}.$$

On dit plus simplement que s et $-s$ sont des paramétrage normaux de $\mathcal{C}$.

Démonstration. — Supposons f régulier, c'est-à-dire que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Notons $s : I \to s(I) \subset \mathbb{R}$ une abscisse curviligne.
– L'application s est de classe C^1 sur I, $J = s(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall t \in I\ ,\ \ s'(t) \ = \ \|f'(t)\| > 0.$$

Il en résulte que $s : I \to J$ est bijective et que $s^{-1} : J \to I$ est de classe C^1 sur J. Ainsi, $f \circ s^{-1}$ est un paramétrage admissible de f.
De plus, en notant $g = f \circ s^{-1}$, on a pour tout $u \in J$:

$$\|g'(u)\| = \left\| \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}\ f'(s^{-1}(u)) \right\| \ = \ \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}\ \left\| f'(s^{-1}(u)) \right\| \ = \ 1,$$

donc g est un paramétrage normal de f.
– Réciproquement, soit $g : J \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage normal de f. Puisque g est un paramétrage admissible de f, il existe $\varphi : J \to I$, de classe C^1 sur J, bijective, de réciproque φ^{-1} de classe C^1 sur I, et telle que $g = f \circ \varphi$.
L'application $\psi \ = \ \varphi^{-1} : I \to J$ est de classe C^1 sur I et

$$\forall t \in I\ ,\ \|f'(t)\| \ = \ \|(g \circ \psi)'(t)\| \ = \ \|\psi'(t)\, g'(\psi(t))\| \ = \ |\psi'(t).$$

Comme $\psi' > 0$ ou $\psi' < 0$, on déduit que

$$\big(\forall t \in I\ ,\ \psi'(t) \ = \ \|f'(t)\|\big) \ \text{ ou } \ \big(\forall t \in I\ ,\ \psi'(t) \ = \ -\|f'(t)\|\big).$$

ce qui montre que ψ ou $-\psi$ est une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$. □

Une courbe $\mathcal{C}$ est dite *régulière* si elle admet au moins un paramétrage régulier f. On peut alors paramétrer $\mathcal{C}$ par l'abscisse curviligne (en choisissant une origine des abscisses curvilignes sur $\mathcal{C}$) et on obtient ainsi un paramétrage normal $s \mapsto M(s)$ de $\mathcal{C}$.
Nous supposerons dans la suite que $\mathcal{C}$ est paramétrée par une abscisse curviligne s.
Nous supposerons dans ce qui suit que $\mathcal{C}$ est paramétrée par une abscisse curviligne.

Définition 8.51. — — On appelle *vecteur tangent unitaire (orientant)* de $\mathcal{C}$ en $M(s)$ le vecteur

$$\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}.$$

— On note $\overrightarrow{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{T})$ où Rot_θ désigne la rotation d'angle θ et de centre l'origine.

— Le repère orthonormé direct $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est appelé *repère de Frenet* en M à $\mathcal{C}$.

Proposition 8.52. — *Soit $f : J \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage normal de classe C^k $(k \geqslant 2)$ de $\mathcal{C}$. Il existe une application $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} telle que*

$$\forall s \in J,\ \overrightarrow{T} = \cos\varphi(s)\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi(s)\,\overrightarrow{j}.$$

Remarque 8.53. — Avec les notations et les hypothèses de cette proposition, on a

$$\varphi \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}}\right)\ [2\pi],\ \ \cos\varphi = \frac{dx}{ds}\ \text{ et }\ \sin\varphi = \frac{dy}{ds}.$$

De même, on a les définitions suivantes :

Définition 8.54. — On appelle :

1. *rayon de courbure* en un point $M(s)$ de $\mathcal{C}$ le réel R défini par

$$R = \frac{ds}{d\varphi},$$

2. *courbure* en un point $M(s)$ à $\mathcal{C}$ le réel γ défini par

$$\gamma = \frac{1}{R}.$$

Remarque 8.55. — 1) On admet que R et γ puissent prendre les valeurs ,0, $+\infty$, $-\infty$.

2) On peut montrer que si la famille $\left(\frac{\overrightarrow{dM}}{ds}, \frac{\overrightarrow{d^2M}}{ds^2}\right)$ est libre, alors $\varphi'(s) \neq 0$ pour tout s, et donc $R(s)$ est un nombre réel bien défini et $R(s) = \frac{1}{\varphi'(s)}$.

Exemple 8.56. — Supposons $\mathcal{C}$ définie par par un paramétrage régulier $t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe C^2. On a

$$s' = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lll} x'(t) & = & s'\cos\varphi \\ y'(t) & = & s'\sin\varphi \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$\left\{\begin{array}{lll} x''(t) & = & s''\cos\varphi - s'\varphi'\sin\varphi \\ y''(t) & = & s''\sin\varphi + s'\varphi'\cos\varphi \end{array}\right.$$

Donc

$$\varphi' = \frac{x'y'' - x''y'}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}},$$

et de là

$$R = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}^{\,3}}{x'y'' - x''y'}. \tag{8.8.2}$$

Exemple 8.57. — On sait qu'un cercle de centre (a, b) et de rayon $r > 0$ est paramétré par $t \mapsto (a + r\cos t, b + \sin t)$. On a donc

$$x'(t) = -r\sin t,\ x''(t) = -r\cos t,\ y'(t) = r\cos t \text{ et } y''(t) = -r\sin t.$$

D'après la relation (10.5), on a

$$R = \frac{\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}}{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}.$$

Le rayon de courbure d'un cercle de rayon $r > 0$ est donc en tout point égal à $\frac{1}{r}$ tandis que sa courbure est égale à r.

Exemple 8.58. — Supposons que $\mathcal{C}$ soit donnée par $y = f(x)$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est supposée de classe C^2. Alors $\mathcal{C}$ est paramétrée par le paramètre x, et en tout point où f'' ne s'annule pas on a

$$R = \frac{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}. \tag{8.8.3}$$

Exemple 8.59. — Pour toute droite D d'équation $y = ax + b$ $(a \in \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$, on a $f'(x) = a$ et $f''(x) = 0$ en tout point x de $\mathbb{R}$. La formule (6.10) montre alors que le rayon de courbure en tout point de D est infini et que la courbure est nulle (ce qui est intuitivement évident pour une droite !).

Formules de Frenet

Proposition 8.60. — *Avec les notations introduites ci-dessus, on a les formules suivantes, appelées formules de Frenet :*

$$\frac{\overrightarrow{dT}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}, \quad \frac{\overrightarrow{dN}}{ds} = -\frac{\overrightarrow{T}}{R}.$$

Démonstration. — On a

$$\frac{\overrightarrow{dT}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{\overrightarrow{dT}}{d\varphi} = \frac{1}{R}\overrightarrow{N}$$

ainsi que

$$\frac{\overrightarrow{dN}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{\overrightarrow{dN}}{d\varphi} = \frac{1}{R}(-\overrightarrow{T}) = -\frac{1}{R}\overrightarrow{T}.$$

□

8.9. Exercices

Exercice 154

Déterminer le domaine de définition des courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 1/(1-t^2) \\ y(t) = e^t/t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{t-1} \\ y(t) = \sqrt{2-t^2} \end{cases}.$$

Exercice 155

On considère la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t^3/(t^2-1) \\ y(t) = 1/(t^3-t) \end{cases}$.

a) Déterminer le domaine de définition de cette courbe.
b) Effectuer le changement de t en $-t$ dans x et y. Qu'en déduit-on pour le domaine d'étude ?
c) Effectuer le changement de t en $1/t$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 156

On considère la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(|\sin t|) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$.

1) Déterminer le domaine définition de cette courbe.
2) Effectuer le changement de $t \mapsto t+\pi$ dans x et y. Qu'en déduit-on pour le domaine d'étude ?
3) Peut-on réduire davantage ce domaine ?

Exercice 157

Écrire une équation cartésienne pour chacune des courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = a\,\mathrm{ch}t \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}t \end{cases}$$

Exercice 158

On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = (1-t^2)/(1+t^2) \\ y(t) = (t-t^3)/(1+t^2) \end{cases}$

En observant que $y(t) = t\,x(t)$ pour tout t réel, en déduire les coordonnées de l'unique point double de $\mathcal{C}$.

Exercice 159

On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = (1-t^2)/(1+t^2) \\ y(t) = (t-t^3)/(1+t^2) \end{cases}$

En observant que $y(t) = t\,x(t)$ pour tout t réel, en déduire les coordonnées de l'unique point double de $\mathcal{C}$.

Exercice 160

Déterminer les coordonnées des points doubles éventuels de chacune des courbes suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t^2-2 \\ y(t) = (t^4+1)/t^2 \end{cases} , \quad \begin{cases} x(t) = 2t+t^2 \\ y(t) = (2t^3-1)/t^2 \end{cases}$$

Exercice 161

1) Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$ où les composantes x et y admettent en 0 les développements limités suivants :

$$x(t) = 1-t^2+2t^3-t^4+o(t^4) \text{ et } y(t) = 2+t^2-2t^3-t^4+o(t^4).$$

On note A le point de paramètre $t=0$.
a) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un point stationnaire en A ?
b) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A.
c) Étudier et tracer l'allure de $\mathcal{C}$ au voisinage de A.

2) Mêmes questions avec la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$ où les fonctions x et y admettent en 0 les développements limités suivants :

$$x(t) = 3-2t^2+2t^3-t^4+o(t^4) \text{ et } y(t) = 2+3t^2-3t^3-t^4+o(t^4).$$

Exercice 162

On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = (t^2+1)/t \\ y(t) = (2t^3+1)/(2t^2) \end{cases}$.

1) Vérifier que $\mathcal{C}$ admet un seul point stationnaire $M(t_0)$ dont on précisera les coordonnées.

2) a) Écrire la formule de Taylor-Young vectorielle en t_0. En déduire les entiers p et q ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du cours.

b) Préciser la nature du point stationnaire $M(t_0)$.

3) Écrire une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(t_0)$.

4) Tracer soigneusement l'allure de $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.

Exercice 163

On note $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & (2t^3-1)/t^2 \\ y(t) & = & 2t+t^2 \end{array}\right. .$$

1) Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point stationnaire $M(t_0)$ où t_0 est une valeur du paramètre que l'on précisera.

2) Écrire la formule de Taylor-Young vectorielle au voisinage de t_0 à l'ordre 4. En déduire les entiers p et q ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du cours.

3) Dessiner soigneusement $\mathcal{C}$ au voisinage du point $M(t_0)$.

Exercice 164

On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t/(1+t^3) \\ y(t) & = & t^2/(1+t^3) \end{array}\right.$.

1) Préciser le domaine de définition de $\mathcal{C}$.

2) Pour tout $t \neq 0$, calculer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire que l'on peut prendre $]-1,1[\setminus\{0\}$ comme domaine d'étude $\mathcal{D}$ et expliquer comment on récupère la courbe complète.

3) Étudier sur $\mathcal{D}$ les variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

4) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des points stationnaires ?

5) Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

6) Dresser le tableau de variations conjointes de x et de y.

7) Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$.

8) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des points multiples ? Si oui préciser pour quelles valeurs de t.

Exercice 165

Étudier les asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t/(t-1) \\ y(t) & = & 3t/(t^2-1) \end{array}\right.$.

On précisera avec soin la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à ses asymptotes.

Exercice 166

Soit C la courbe paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2t+t^2 \\ y(t) & = & (2t^3-1)/t^2. \end{array}\right.$$

1) Montrer que si u et v sont deux réels distincts et non nuls, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(u) & = & x(v) \\ y(u) & = & y(v) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} u+v & = & -2 \\ (uv)^2 & = & 1. \end{array}\right.$$

2) En déduire que C admet un point double dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 167

Étudier et tracer, au voisinage du point de paramètre $t = 0$, l'allure des courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 \\ y(t) = t^2\,(1 - t^2) \end{cases}, \begin{cases} x(t) = 1 + t^2 \\ y(t) = t^2\,(1 - t) \end{cases}, \begin{cases} x(t) = t\,\cos t \\ y(t) = t\,\sin t \end{cases}$$

Exercice 168

Montrer que la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = 1/(t^2 - 4t) \\ y(t) = (t^2 - 1)/t \end{cases}$ admet une asymptote oblique. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 169

Ètudier les branches infinies des courbes paramétres suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = (t+2)^2/(t+1) \\ y(t) = (t-2)^2/(t-1) \end{cases}, \begin{cases} x(t) = t^2/(t-1) \\ y(t) = t/(t^2-1) \end{cases}, \begin{cases} x(t) = t^3/(t^2-9) \\ y(t) = t\,(t-2)/(t-3) \end{cases}.$$

Exercice 170

On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t/(1+t^3) \\ y(t) = t^2/(1+t^3) \end{cases}$.

a) Préciser le domaine de définition de $\mathcal{C}$.

b) Pour tout $t \neq 0$, calculer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire que l'on peut prendre $]-1, 1[\setminus\{0\}$ comme domaine d'étude $\mathcal{D}$ et expliquer comment on récupère la courbe complète.

c) Étudier sur $\mathcal{D}$ les variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

d) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des points stationnaires ?

e) Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

f) Dresser le tableau de variations conjointes de x et de y.

g) Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}$.

h) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des points multiples ? Si oui préciser pour quelles valeurs de t.

Exercice 171

On se propose d'étudier et de représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t^2/(t-1) \\ y(t) = (t-2)^2)/(t^2-1) \end{cases}$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de ce paramétrage.

b) Étudier les variations de x et y , et déterminer les points stationnaires éventuels.

c) Étudier x et y aux extrémités des intervalles constituant le domaine de définition $\mathcal{D}$.

d) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation . Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.

e) Étudier l'allure de $\mathcal{C}$ au voisinage du point de paramètre $t = 2$.

f) Dresser le tableau de variations résumant les résultats obtenus ci-dessus.

g) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

h) $\mathcal{C}$ admet-elle des points doubles ?

Exercice 172

Étudier et représenter graphiquement les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t^3/(t^2-1) \\ y(t) = 1/(t^3-1) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t) = 1/(1-t^2) \\ y(t) = t^2/(1-t) \end{cases}$$

Exercice 173

Calculer la longueur de l'astéroïde de paramétrage

$$[0, 2\pi] \to \mathbb{R}\ , \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{cases}$$

Réponse : 6.

Exercice 174

Calculer la longueur de la boucle de la courbe paramétrée par

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) &= 3t^2-1 \\ y(t) &= 3t^3-t \end{cases}$$

Réponse : $4/\sqrt{3}$.

Exercice 175

Donner un paramétrage normal d'un cercle centré à l'origine et de rayon $r > 0$.
Réponse : On peut choisir $s(t) = rt$ comme abscisse curviligne. On a alors $s^{-1}(t) = t/r$ d'où un paramétrage normal donné par $t \mapsto (r\cos(t/r), r\sin(t/r))$.

Exercice 176

Calculer le rayon de courbure au point d'abscisse 2 de la courbe d'équation $y = \ln x$.

Exercice 177

Calculer le rayon de courbure à l'origine de la courbe paramétrée par

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad t \mapsto \begin{cases} x(t) &= 2t^2+t-1 \\ y(t) &= (t+1)\, e^{1/t} \end{cases}$$

Exercice 178

La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant, homogène, tenu à ses deux extrémités. Dans un repère approprié, elle admet pour équation $y = \mathrm{ch}(x)$.
1) Déterminer la longueur d'un arc de chaînette.
2) Préciser le repère de Frenet et la courbure en un point.
Réponse : La courbure vaut $\gamma = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}$.

CHAPITRE 9

VERS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

9.1. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

9.1.1. Définitions. —

***Définition 9.1* (Forme générale de l'équation).** — On appelle équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme :

$$A(x)y' + B(x)y = C(x)\,, \tag{9.1.1}$$

où A, B, C sont trois fonctions continues de $J \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, J étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
L'équation homogène associée à (9.1.1) est :

$$A(x)y' + B(x)y = 0\,. \tag{9.1.2}$$

***Définition 9.2* (Forme résolue).** — Si A ne s'annule pas en un point $x_0 \in J$, alors il existe un intervalle $I \subset J$ tel que $A(x) \neq 0$ pour $x \in I$ et alors (9.1.1) se met sous la forme dite "résolue" sur I :

$$y' = -\frac{B(x)}{A(x)}y + \frac{C(x)}{A(x)} = b(x)y + c(x)\,.$$

Définition 9.3. — Soit $J_1 \subset J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On dit que f est une J_1-solution de (9.1.1) si, pour tout $x \in J_1$, on a :

$$A(x)f'(x) + B(x)f(x) = C(x)\,.$$

Nous nous intéresserons donc aux couples (J_1, f) qui résolvent l'équation (9.1.1). Si (J_1, f) est une solution de (9.1.1) et si $J_2 \subset J_1$, alors (J_2, f) est une J_2 solution de (9.1.1).

***Définition 9.4* (Solution maximale).** — On dit que (J_1, f) est une solution maximale de (9.1.1) si et seulement si elle n'est la restriction à J_1 d'aucune autre solution qu'elle-même.

Dans la suite, nous allons porter essentiellement notre attention les solutions de l'équation mise sous forme résolue.
Le cas scalaire linéaire a le bon goût d'être particulièrement simple à résoudre. Nous considérons donc l'équation :

$$y' = b(x)y + c(x), \quad x \in I\,, \tag{9.1.3}$$

où b et c sont des fonctions continues sur I. Nous rappelons l'équation homogène :

$$y' = b(x)y, \quad x \in I\,. \tag{9.1.4}$$

9.1.2. Propriétés élémentaires. — Nous disposons des théorèmes élémentaires suivants :

Théorème 9.5. — *L'ensemble des I_1-solutions de (9.1.4) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.*

Théorème 9.6. — *L'ensemble des I_1-solutions de (9.1.3) est un $\mathbb{R}$ espace affine de direction l'ensemble des I_1-solutions de (9.1.4).*

9.1.3. Résolution. —

Théorème 9.7 **(Équation homogène).** — *Soit I_1 un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Les I_1-solutions de l'équation homogène (H) forment un $\mathbb{R}$ e. v. de dimension 1. De plus, les solutions maximales sont définies sur I et si une solution de (H) s'annule en un point, elle est identiquement nulle.*

Théorème 9.8. — *Soit I_1 un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Les I_1-solutions de (E) forment une droite affine de dimension 1. De plus, les solutions maximales sont définies sur I.*

Si l'équation n'est pas mise sous forme résolue, on résout d'abord sur les intervalles où A ne s'annule pas, puis on se pose la question du recollement des solutions.

9.1.4. Résolution pratique. — La théorie du paragraphe précédent fournit les solutions de façon explicite. Cependant, il vaut mieux retenir le principe (très général) de la démonstration :

i. on résout l'équation homogène (H),
ii. on cherche une solution particulière de (E) : soit on en trouve une explicite, soit on utilise la méthode de variation de la constante (qui marche à coup sûr !).

Proposition 9.9 **(Superposition des solutions).** — *Considérons l'équation :*

$$A(x)y' + B(x)y = \sum_{i}^{n} C_i(x)\,,$$

avec A, B, C_i continues sur I et avec A ne s'annulant pas sur I. Si y_i est une solution de

$$A(x)y' + B(x)y = C_i(x)\,,$$

alors, $\sum_i^n y_i$ est solution de (E).

Exemple 9.10. — $xy' - y = \ln(x) + 1$

Théorème 9.11 **(Problème de Cauchy).** — *On considère (E) avec A, B, C continues sur I et A ne s'annulant pas sur I. Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution Y de (E) définie sur I qui vérifie $Y(x_0) = y_0$. De plus, toute solution de (E) qui vérifie $y(x_0) = y_0$ est la restriction de Y à un intervalle contenant x_0.*

Lorsque A s'annule sur I, tous les résultats précédents (structure des solutions, existence, unicité) tombent en défaut : c'est le problème du raccord des solutions définies sur les intervalles où A ne s'annule pas.
Exemple : $ty' - \alpha y = 1$. Pour quelles valeurs de α existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$? Que dire du problème de Cauchy : existe-t-il des solutions telles que $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$?

9.1.5. Cas des coefficients constants. —

Définition 9.12. — On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants toute équation de la forme :

$$y' + by = C(x), \qquad \text{où } C : I \to \mathbb{R} \text{ continue}.$$

Nous avons vu que les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $y(x) = \lambda e^{-bx}$ et que les solutions de (E) sont définies sur I. Il y a des cas où on peut déterminer une solution particulière sans recourir à la méthode de variation de la constante.

1. Cas où $C(x) = P(x)$ quand P est un polynôme. On cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)$.
2. Cas où $C(x) = P(x)e^{\alpha x}$ quand P est un polynôme. On cherche une solution sous la forme $e^{\alpha x}g(x)$.

Exemple 9.13. —

$$y' - y = (x+1)e^x + \sin(2x) + x\cos(x) + \frac{1}{1+x^2}\,.$$

9.1.6. Exercices. —

Exercice 179

Résoudre : $x^2y' - y = 3 + \frac{1}{x}$.

Exercice 180

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ et :

$$(E_\alpha) : x(x-1)y' - ((2+\alpha)x - 2)y = x^4((2-\alpha)x - 2)\,.$$

Résoudre (E_α). Quelles sont les solutions définies sur $]-\infty, 1]$? Pour quelles valeurs de α y a-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$? Étudier le problème de Cauchy en $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 181

Résoudre : $y' - y = xe^{-x} + \cos(2x) + (x-1)\sin x + \ln x$.

9.2. Équations différentielles vectorielles linéaires d'ordre 1

9.2.1. Généralités sur les équations différentielles. —

Définition 9.14. — On appelle équation différentielle vectorielle linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme :

$$(E) : Y' = A(t)Y + B(t)\,,$$

où $A : I \to \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^p$ sont continues. Dans ce qui suit, on pourra considérer pour simplifier que $p = 2$.

De même que dans le cas scalaire on définit l'équation homogène associée à (E) :

$$(H) : Y' = A(t)Y\,.$$

Une solution de (E) est un couple (J, ϕ) où J est un intervalle inclus dans I et ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que :

$$\forall t \in J, \quad \phi' = A(t)\phi + B(t)\,.$$

9.2.1.1. *Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire).* — Nous allons à présent énoncer un théorème fondamental donnant l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy (dans le cas linéaire).

Théorème 9.15. — *Soit $A : I \to \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^p$ deux applications continues sur I. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^p$, l'équation :*

$$(E) : Y' = A(t)Y + B(t)$$

admet une unique solution satisfaisant $Y(t_0) = Y_0$.

9.2.1.2. *Structure des solutions.* — Nous savons donc que les solutions de (E) existent et sont définies sur I. Examinons donc leurs propriétés.

Proposition 9.16. — *L'ensemble des solutions de (H) est un $\mathbb{K}$-e. v. de dimension p. L'ensemble des solutions de (E) est un espace affine de direction l'ensemble des solutions de (H).*

Choisissons désormais une base de E et considérons plutôt les systèmes :

$$Y' = A(t)Y.$$

Nous allons introduire une quantité commode pour savoir si p solutions de l'équation homogène (H) forment une famille libre (et donc une base S_H).

9.2.1.2.1. *Wronskien de p applications à valeurs dans $\mathbb{K}^p$.* —

Définition 9.17. — On appelle wronskien de p applications $Y_1, \cdots Y_p$ de I à valeurs dans $\mathbb{K}^p$ la quantité :

$$w(t) = \det(Y_1(t), \cdots, Y_p(t)).$$

Proposition 9.18. — *Si $(Y_1, \cdots, Y_p)$ est lié, on a :*

$$\forall t \in I, \quad w(t) = 0.$$

Proposition 9.19. — *S'il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$, alors $(Y_1, \cdots, Y_p)$ est libre.*

9.2.1.2.2. *Wronskien des solutions de (H).* —

Théorème 9.20. — *Soient $Y_1, \cdots, Y_p$ p solutions du système homogène $(H) : Y' = A(t)Y$ avec A continue sur I. Alors, on a :*

$$\forall t \in I, \quad w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))w(t).$$

En particulier, $Y_1, \cdots, Y_p$ est lié si et seulement si w est identiquement nulle si et seulement si w s'annule en au moins un point.

9.2.1.2.3. *Variation des constantes.* — Supposons qu'on ait trouvé p solutions indépendantes de (H). Nous pouvons alors déterminer les solutions de (E).

Théorème 9.21. — *Soient $Y_1, \cdots, Y_p$ p solutions indépendantes de (H) sur I. On pose :*

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Y_i(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors, on a :

1. *Y est dérivable si et seulement si les λ_i sont dérivables.*
2. *Y est solution de (E) si et seulement si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i'(t)Y_i = B(t)$.*

Exemple : Résoudre : $(t^2+1)x' = tx - y + 2t$ et $(t^2+1)y' = x + ty - 1$.

Résoudre : $\begin{cases} x' &= tx + (1-t^2)y + (1-t^2)^2 \\ y' &= x - ty + t(1+t^2) \end{cases}$

9.3. Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

9.3.1. Généralités. —

Définition 9.22. — On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 toute équation différentielle de la forme :

$$A(x)y'' + B(x)y + C(x)y = D(x),$$

où A, B, C et D sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues.

Dans la suite, nous nous intéressons aux solutions maximales de l'équation sous forme résolue. Écrivons le système linéaire d'ordre 1 associé à :

$$(E) : y'' = b(x)y' + c(x)y + d(x)$$

avec a, b, c et d continues sur I. (E) est équivalent à (S) :

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = b(x)u + c(x)y + d(x) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} y' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(x) & b(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d(x) \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons appliquer les résultats précédents pour obtenir en particulier :

Proposition 9.23. — *1. Les solutions de (S) sont définies sur I.*

2. Les solutions de (H) forment un $\mathbb{K}$ e.v. de dimension 2.

3. Pour tout $(t_0, a_0, a_1) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution de (E) définie sur I telle que $y(t_0) = a_0$ et $y'(t_0) = a_1$.

Dans le cas général, on ne sait résoudre ni (H) ni (E).

1. Si on connaît deux solutions indépendantes y_1 et y_2 de (H) et une solution particulière de (E) y_0, alors la solution générale de (E) est :
$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + y_0.$$
2. Si on connaît une solution Y de (H) ne s'annulant pas sur $J \subset I$, alors on va pouvoir résoudre (E) sur J. On pose en effet $y = zY$ et on est ramené à une équation du premier ordre.
Résoudre : $(t^2 + 1)x'' - 2x = 4t(t^2 + 1)$ en remarquant que (H) possède une solution polynômiale.
3. Si on connaît deux solutions indépendantes y_1 et y_2 de (H), alors on peut utiliser la méthode de variation des constantes. On commence par écrire le système associé :
$$\begin{bmatrix} y' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(x) & b(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d(x) \end{bmatrix}.$$
$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix}$ sont deux solutions indépendantes de (H). On cherche alors la solution générale sous la forme : $Y = c_1(x)Y_1 + c_2(x)Y_2$ et on trouve :
$$c_1'Y_1 + c_2'Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d(x) \end{bmatrix}.$$
Il n'y a plus qu'à trouver c_1 et c_2 en inversant le système.

Résoudre : $x^2y'' + xy' - y = 2x$ en remarquant qu'il existe des solutions de la forme x^m avec $m \in \mathbb{Z}$.

9.3.2. Cas des coefficients constants. —

9.3.2.1. *Propriétés générales.* —

Définition 9.24. — On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation du type :

$$ay'' + by' + cy = D(x),$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$ et $D : I \to \mathbb{K}$ continue.

Les solutions de (H) sont définies sur $\mathbb{R}$ et forment un $\mathbb{K}$ e. v. de dimension 2. Les solutions de (E) sont définies sur I et forment un plan affine.

9.3.2.2. *Solutions de* (H). — On sait toujours calculer deux solutions indépendantes de (H). On remarque déjà que $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (H) si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$. Deux cas se présentent.

9.3.2.2.1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. — Si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, alors il y a deux racines distinctes r_1 et r_2 et la solution générale de (H) est de la forme :

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}.$$

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r_0. On pose $y = ze^{r_0 x}$ et en remplaçant on trouve : $z = \lambda x + \mu$.

9.3.2.2.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. — Si $\Delta \geqslant 0$, cf. le premier cas. Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta.$$

Ces racines donnent lieu à deux solutions conjuguées :

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$$

et

$$y_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)).$$

On en déduit que $Y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ et $Y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sont solutions de (H) et elles sont indépendantes.
Résoudre : $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y'' - 5y' - 6y = 0$ et $y'' + y' + y = 0$.

9.3.2.3. *Solutions de* (E). — On connaît toujours une solution de (H) de la forme e^{rx}, on peut donc chercher les solutions sous la forme : $y = e^{rx}z$.
Résoudre : $y'' - 6y' + 9y = 3x^2e^{-3x}$ et $y'' + y = \tan^2(x)$.

9.3.3. Quelques problèmes classiques. —

9.3.3.1. *Problème des raccords : exemple.* — Examiner le raccord des solutions de : $(t + 1)y'' - 2y' - (t - 1)y = te^{-t}$ en remarquant que e^t est solution de l'équation homogène. Résoudre le problème de Cauchy pour ces solutions.

9.3.3.2. *Changement de variable ou de fonction inconnue : exemple.* — Résoudre : $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

9.3.4. Exercices. —

Exercice 182

Résoudre $(x + 1)y'' - y' - xy = e^{-x}$. On cherchera une solution de (H) sous la forme $e^{\alpha x}$.

Exercice 183

Soit (E) : $t^2x'' - 4tx' + 6x = t^4e^t$. Montrer que (H) admet des solutions sous la forme t^n et résoudre (E).

Exercice 184

Résoudre : $y'' + 2y' + y = 0$.

Exercice 185

Résoudre : $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Exercice 186

Résoudre : $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Exercice 187

Résoudre : $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$.

Exercice 188

Résoudre : $y'' - 3y' + 1 = (2x-1)e^{-x}$.

Exercice 189

Résoudre : $y'' - 2y' + y = x\cosh(x) + x\sin(2x)$.

Exercice 190

Soit $(E) : x^2y''+xy'-4y = 5x^3\ln(x)+6x^3$. Résoudre (E) sachant que (H) possède une solution de la forme $|x|^\alpha$. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 191

Résoudre : $(x+1)y'' - y' - xy = (x+1)^2$. On pourra remarquer que $y_1(x) = e^x$ et $y_2(x) = (2x+3)e^{-x}$ sont solutions de l'équation homogène.

Exercice 192

Résoudre : $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$.

Exercice 193

Résoudre : $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$. On posera $x = \cos t$ avec $t \in]0, \pi[$.

Exercice 194

Résoudre : $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$. On pourra chercher une solution sous forme d'une série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\lambda}$. Que dire des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 195

Étudier les solutions de $-\psi'' + x^2\psi = \psi$. Montrer que l'ensemble des solutions de carré intégrable est de dimension 1 et en donner une base.

Exercice 196

Trouver une solution particulière de :

$$x'' + \omega_0^2 x = \cos(\omega t).$$

Résoudre ensuite cette équation. Que se passe-t-il quand $\omega = \omega_0$?

9.4. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

9.4.1. Étude théorique. —

Définition 9.25. — On appelle système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants tout système différentiel de la forme :

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ est continue.

Proposition 9.26. — *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\sum \frac{A^k}{k!}$ est une série convergente et sa somme est notée e^A. De plus, $\phi t \mapsto e^{tA}$ est dérivable et $\phi'(t) = A\phi(t) = \phi(t)A$.*

En particulier, cette proposition prouve que les solutions de (H) sont définies sur $\mathbb{R}$ et qu'elles sont toutes de la forme : $X(t) = e^{tA}x_0$ où $x_0 \in \mathbb{K}^n$.

Proposition 9.27. — *Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Si on pose $X = PZ$, alors (E) est équivalente à*

$$Z'(t) = P^{-1}APZ(t) + P^{-1}B(t).$$

9.4.2. Résolution de (E) quand A est diagonalisable. —

9.4.2.1. *Résolution de (H).* — Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

En posant $X = PZ$, il vient :

$$Z'(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)Z(t)$$

et donc, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$:

$$z_i'(t) = \lambda_i z_i(t).$$

On en déduit que $z_i(t) = \mu_i e^{\lambda_i t}$. On rappelle que $P = (V_1, \cdots, V_n)$ où les V_i forment une base de vecteurs propres. Ainsi, on a :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e^{\lambda_i t} V_i.$$

Résoudre :

$$\begin{cases} y_1' &= 5y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

9.4.2.2. *Résolution de (E).* — De la même façon que précédemment, on est ramené à résoudre :

$$z_i' = \lambda_i z_i + c_i(t)$$

où $C(t) = P^{-1}B(t)$.
Une autre façon serait d'utiliser la méthode de variation des constantes.
Résoudre :

$$\begin{cases} y_1' &= 5y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 + t \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Remarque 9.28. — Si les coefficients sont réels et si les valeurs propres de A ne sont pas réelles, on peut tout de même remarquer que les parties réelles et imaginaires d'une solution sont solutions de (H).

9.4.2.3. *Résolution de (E) quand A est trigonalisable.* — Dans ce cas, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$P^{-1}AP = T,$$

avec T triangulaire supérieure. On est alors ramené à la résolution d'un système en cascade.
Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} x' & = & 2y+2z \\ y' & = & -x+2y+2z \\ z' & = & -x+y+3z \end{array}\right.$$

9.4.3. Exercices. —
Exercice 197
Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} y_1' & = & y_1+4y_2 \\ y_2' & = & 2y_1+3y_2 \end{array}\right.$$

Exercice 198
Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} y_1' & = & y_1+4y_2+\cos x \\ y_2' & = & 2y_1+3y_2+x \end{array}\right.$$

Exercice 199
Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} y_1' & = & y_2+y_3 \\ y_2' & = & y_1+y_3 \\ y_3' & = & y_1+y_2 \end{array}\right.$$

Exercice 200
Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} y_1' & = & y_2+y_3+e^t \\ y_2' & = & y_1+y_3+t \\ y_3' & = & y_1+y_2 \end{array}\right.$$

Exercice 201
Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} x' & = & 8x+12y+10z \\ y' & = & -9x-22y-22z \\ z' & = & 9x+18y+17z \end{array}\right.$$

Exercice 202
Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} y' & = & y+z+1 \\ z' & = & -y+3z-x \end{array}\right.$$

On calculera e^{xA}.

Exercice 203
Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} x' & = & -4x+y+z \\ y' & = & x-y-2z \\ z' & = & -2x+y-z \end{array}\right.$$

On remarquera que la matrice associée A n'a qu'une seule valeur propre. Expliquer pourquoi $(A+\lambda Id)^3 = 0$.

Exercice 204

Résoudre : $y^{(3)} + 2y^{(2)} - y' - 2y = 0$.

9.5. Méthode du tir

Nous allons essentiellement donner des exemples de cette technique. Elle concerne les équations différentielles avec des conditions aux limites qui ne sont pas celles de Cauchy-Lipschitz.

Exemple 9.29. — Pour $c \neq 0$, résoudre $x' = cx$ avec $x'(1) = 1$. Le principe est d'introduire un paramètre de tir τ et de résoudre, en fonction de τ le problème :

$$x' = cx, \quad x(0) = \tau\,.$$

Dans ce cas, on trouve :

$$x_\tau(t) = \tau e^{ct}\,.$$

Il s'agit alors de sélectionner dans cette famille x_τ les éléments qui vérifient la condition aux limites. On calcule donc $x'_\tau(1) = c\tau$ et cela impose : $\tau = c^{-1}$ et nous avons résolu le problème.

Exemple 9.30. — Résoudre $x'' + x = 0$ avec $x(0) = x(1) = 0$. On introduit le paramètre de tir τ en résolvant le problème de Cauchy suivant :

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = \tau.$$

Cela se résout sans difficulté :

$$x_\tau(t) = \tau \sin t.$$

$x_\tau(1) = 0$ implique alors $\tau = 0$ et seule la solution nulle fonctionne.

Exemple 9.31. — Déterminer les nombres λ pour lesquels il existe une solution non nulle du problème suivant :

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, x(1) = 0\,.$$

Remarquons déjà que si $\lambda = 0$, seule la solution nulle convient.

On résout donc :

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = \tau.$$

Si $\lambda < 0$, on trouve :

$$x_\tau(t) = \frac{\tau}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(t\sqrt{-\lambda}).$$

La condition aux limites impose que $\tau = 0$.
Si $\lambda > 0$, on trouve sans mal :

$$x_\tau(t) = \frac{\tau}{\sqrt{\lambda}} \sin(t\sqrt{\lambda}).$$

La condition aux limites donne $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ et donc $\lambda = n^2\pi^2$. Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par :

$$x_\tau(t) = \frac{\tau}{n\pi} \sin(n\pi t).$$

9.6. Un problème sur les lois de Képler

Considérons deux fonctions deux fois dérivables x_1 et x_2. On pose

$$r(t) = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}\,,$$

et on suppose que r est borné et ne s'annule pas.

On suppose qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que pour tout $t \geqslant 0$,

$$x_1''(t) = -\frac{\gamma}{r(t)^3}x_1(t)\,, \quad x_2''(t) = -\frac{\gamma}{r(t)^3}x_2(t)\,.$$

Ces équations sont issues de la Physique, via le principe fondamental de la dynamique appliqué à un corps soumis à une force centrale (par exemple la Terre soumise à l'attraction du Soleil). En fait, γ est le produit de la constante de gravitation universelle par la masse du Soleil.

1. On pose [(1)]

$$A(t) = \frac{1}{2}(x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t))\,.$$

Montrer que A est une fonction constante, notée A_0.

Le fait que cette fonction est constante s'appelle en Physique "la loi des aires". Elle a été énoncée initialement par Kepler pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil.

2. Expliquer pourquoi r est dérivable et exprimer r' en fonction de x_1, x_1', x_2 et x_2'.
3. On pose

$$E(t) = \frac{1}{2}(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2) - \frac{\gamma}{r(t)}\,.$$

Montrer que E est une fonction constante, notée E_0.

En Physique, cette fonction E s'appelle "l'énergie" du système.

4. Démontrer que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$E(t) = \frac{r'(t)^2}{2} + \frac{2A_0^2}{r(t)^2} - \frac{\gamma}{r(t)} = E_0\,.$$

5. On pose, pour tout $t \geqslant 0$, $\rho(t) = \frac{1}{r(t)}$. Montrer que

$$E(t) = \frac{\rho'(t)^2}{2\rho(t)^4} + 2A_0^2\rho(t)^2 - \gamma\rho(t) = E_0\,.$$

6. On considère la fonction θ vérifiant [(2)]

$$\theta'(t) = 2A_0\rho(t)^2\,, \quad \theta(0) = 0\,.$$

Montrer que θ réalise une bijection entre $[0, +\infty[$ et $[0, +\infty[$. On note θ^{-1} sa bijection réciproque.

7. Exprimer $(\theta^{-1})'(x)$ à l'aide de ρ et θ, pour tout $x \geqslant 0$.
8. On pose, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\tilde{\rho}(x) = \rho(\theta^{-1}(x))\,.$$

Exprimer la dérivée de $\tilde{\rho}$ en fonction des fonctions ρ et θ.

---

1. Le lecteur pourra observer que $A(t) = \frac{1}{2}r(t)^2\theta'(t)$ et ce en vertu de l'exercice précédent.

2. Une telle fonction θ existe car ρ^2 est une fonction continue. En fait, on a $\theta(t) = 2A_0\int_0^t \rho(\tau)^2 \mathrm{d}\tau$. De plus, cette fonction est celle qui donne à chaque instant l'angle entre l'axe des abscisses et $\overrightarrow{OM}(t)$ quand cet angle est nul en $t = 0$.

9. Établir que, pour tout $x \geqslant 0$,
$$\tilde{\rho}'(x)^2 + \tilde{\rho}(x)^2 - \frac{\gamma}{2A_0^2}\tilde{\rho}(x) - \frac{E_0}{2A_0^2} = 0\,.$$
10. Montrer que $\tilde{\rho}(x) = \alpha + \beta\cos(x-\varphi)$ vérifie l'équation précédente dès que α et β sont choisis convenablement et pour $\varphi \in \mathbb{R}$ arbitraire. On admet dans la suite que seuls les $\tilde{\rho}$ de cette forme vérifient cette équation. Expliquer pourquoi $\frac{\beta}{\alpha} \in [0,1[$.
11. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$,
$$r(t) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta(t)-\varphi)}\,,$$
pour $p \geqslant 0$ et $e \in [0,1]$ bien choisis et φ arbitraire.
12. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$,
$$\theta'(t) = \frac{2A_0}{p^2}(1 + e\cos(\theta(t)-\varphi))^2\,.$$
Quitte à changer θ en $\theta+\varphi$, on peut supposer que $\varphi = 0$. C'est ce qu'on fait dans la suite. [3]
13. On note $T > 0$ l'unique réel strictement positif telle que $\theta(T) = 2\pi$. Montrer que
$$\theta(t) = \theta(t+T) - 2\pi\,,$$
puis que r est T-périodique.
14. En admettant que
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos(\theta))^2} = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
montrer que [4]
$$\frac{2\pi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2A_0T}{p^2}\,.$$

3. L'expression de r permet de démontrer que la trajectoire est une ellipse, mais c'est une autre histoire qui est racontée quand on étudie les courbes paramétrées !

4. Cette relation est appelée en Physique "loi des périodes" ou encore "troisième loi de Kepler". Si a est le demi grand axe de l'ellipse, on a : $p = a(1-e^2)$ et donc
$$a^{\frac{3}{2}} = \frac{A_0}{\pi\sqrt{p}}T\,.$$
On a vu que $p = \frac{4A_0^2}{\gamma}$ et donc
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}\,,$$
qui est, à proprement parler, la loi des périodes observée par Kepler : la constante γ ne dépend que de la masse du Soleil. Le rapport entre le cube du demi grand axe et le carré de la période est une constante du système solaire.

CHAPITRE 10

NOMBRES COMPLEXES

10.1. Généralités

10.1.1. Motivations. — Une motivation pour introduire les nombres complexes provient du fait que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle, et plus généralement que certains polynômes n'admettent pas de racines réelles. Pour remédier à ce problème, on introduit un nouveau nombre (imaginaire) i dont la vertu principale est qu'il vérifie $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$.

10.1.2. Propriétés algébriques. — L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ est un ensemble contenant $\mathbb{R}$, muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\cdot$ (qui étendent celles de $\mathbb{R}$ et jouissent des mêmes propriétés : commutativité, distributivité de la multiplication sur l'addition). Il contient un élément, noté i satisfaisant la propriété fondamentale :

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe (un unique) $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$z = a + \mathrm{i}b\,. \tag{10.1.1}$$

En résumant, l'ensemble des nombres complexes est donné par

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + \mathrm{i}b, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Définition 10.1. —

- On note $a = \mathrm{Re}\,(z)$ la partie réelle de z et $b = \mathrm{Im}\,(z)$ la partie imaginaire de z .
- L'écriture (10.1.1) est appelée écriture algébrique de z.
- Le nombre $z \in \mathbb{C}$ peut être représenté graphiquement par le point M du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (a, b). On dit que z est l'affixe de M.
- On appelle module de z le nombre positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ qui est la distance euclidienne entre $M(a, b)$ et l'origine $(0, 0)$.
- On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $a - \mathrm{i}b$. On observe que

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Proposition 10.2. — *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un unique $w \in \mathbb{C}^*$ tel $zw = 1$. Le nombre w s'appelle l'inverse de z.*

Démonstration. — On va chercher un nombre complexe w satisfaisant $zw = 1$. On aimerait prendre $w = \frac{1}{z}$, mais on n'a pas défini le sens de cette expression. Si on multiplie formellement le numérateur et le dénominateur par $\overline{z}$, on est amené à poser

$$w = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,,$$

et ce w convient et peut s'écrire sous la forme $a + \mathrm{i}b$.
Montrons qu'un tel w est unique. Si w_1 et w_2 sont tels que $zw_1 = 1 = zw_2$, alors $z(w_1 - w_2) = 0$. En multipliant par w, on en tire que $w_1 - w_2 = 0$. □

Proposition 10.3. — *Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :*

i. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,

ii. *pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $z_2 \neq 0$,* $\overline{\frac{z_1^n}{z_2^m}} = \frac{\overline{z_1}^n}{\overline{z_2}^m}$

iii. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

iv. $|z_1^n| = |z_1|^n$

v. $|z_1| = |\overline{z_1}|$,

vi. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(inégalité triangulaire).*

Démonstration. —

i. La preuve se fait un travers un calcul direct. Posons

$$z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1, \quad z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2, \quad \text{avec} \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors en développant le calcul on trouve

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

et

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Ainsi on peut facilement vérifier via les formes algébriques des nombres en jeu que

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}.$$

ii. Il suffit de démontrer les deux identités suivantes

$$\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}}.$$

La première découle d'une simple récurrence en utilisant i. Pour obtenir la deuxième propriété, on remplace dans i. z_1 par $\frac{1}{z_2}$ donnant lieu à

$$\overline{1} = \overline{z_2}\,\overline{\frac{1}{z_2}},$$

d'où $\overline{\frac{1}{z_2}} = \frac{1}{\overline{z_2}}$.

iii. En passant au carré, l'identité voulue est équivalente à

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

ce qui revient à démontrer que

$$z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}.$$

À cet effet, il suffit d'utiliser le point i de la proposition combiné avec la commutativité et l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

iv. On peut le démontrer via un argument de récurrence combiné avec le point iii.

v. Il se démontre facilement grâce à la définition du module.

vi. On va d'abord démontrer l'inégalité de droite, c'est à dire,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,. \tag{10.1.2}$$

Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, il faut et il suffit qu'on démontre

$$|z_1 + z_2|^2 \leq \big(|z_1| + |z_2|\big)^2 \,. \tag{10.1.3}$$

En développant le module dans le membre de gauche, on trouve

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) \,. \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (10.1.3) est équivalente à

$$\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1||z_2| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1\overline{z_2}| \,.$$

Il suffit maintenant d'utiliser la propriété suivante valable pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}\,(z) \leq |z| \,.$$

Maintenant nous allons démontrer

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \,,$$

qui est équivalente à

$$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \,,$$

et qui se réécrit

$$|z_2| \leq |z_1| + |z_1 + z_2| \quad \text{et} \quad |z_1| \leq |z_2| + |z_1 + z_2| \,.$$

Pour obtenir la première inégalité, il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire (10.1.3) en échangeant z_1 et z_2 avec $Z_1 = z_1$ et $Z_2 = -(z_1 + z_2)$. De manière analogue on procède pour avoir l'inégalité de droite.

□

10.1.3. Limite d'une suite de nombres complexes. —

Définition 10.4. — On dit qu'une suite (z_n) de nombres complexes tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists N \in \mathbb{N} \,, \forall n \in \mathbb{N} \,, (n \geqslant N \Longrightarrow |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon) \,.$$

Un tel ℓ est unique. C'est la limite de la suite z.

En remarquant que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\max(|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|) \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \,.$$

Proposition 10.5. — *Une suite z de nombres complexes converge vers ℓ si et seulement si $\mathrm{Re}\, z$ converge vers $\mathrm{Re}\, \ell$ et $\mathrm{Im}\, z$ converge vers $\mathrm{Im}\, \ell$.*

10.2. L'exponentielle d'un nombre complexe

Avant d'aller plus profondément dans la description des nombres complexes, rappelons quelques propriétés de l'exponentielle réelle.

10.2.1. Définitions et propriétés. —

Définition 10.6. — Le logarithme népérien ln est défini par :

$$\forall x > 0\,, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} \mathrm{d}u\,.$$

Proposition 10.7. — *La fonction* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est strictement croissante, indéfiniment dérivable, dont la dérivée est*

$$\forall x > 0\,, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Elle vérifie :

$$\forall x, y > 0\,, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,.$$

La fonction ln *réalise une bijection, c'est à dire que, pour tout* $y \in \mathbb{R}$*, il existe un unique* $x > 0$ *tel que* $y = \ln(x)$*. Ce* x *est noté* e^y*.*

Proposition 10.8. — *La fonction* $\mathbb{R} \ni y \mapsto e^y \in]0, +\infty[$*, qui s'appelle la fonction exponentielle, est indéfiniement dérivable et sa dérivée est la fonction exponentielle elle-même. Elle réalise une bijection et vérifie la propriété :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad e^{x+y} = e^x e^y\,.$$

Proposition 10.9. — *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable en* 0 *de dérivée* $f'(0) = 1$ *et telle que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad f(x + y) = f(x)f(y)\,.$$

Alors, f *est la fonction exponentielle.*

Nous pouvons étendre le sens de l'exponentielle à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 10.10. — *Il existe une fonction* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, et une seule, qui satisfait les propriétés suivantes :*

i. $\lim_{\mathbb{C}^* \ni z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 1$.
ii. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $f(z + w) = f(z)f(w)$.

Cette fonction est notée exp *et on a* $\exp(z) = e^z$ *quand* $z \in \mathbb{R}$.

La proposition suivante rassemble des propriétés fondamentales de l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Proposition 10.11. — *La fonction* exp *jouit des propriétés suivantes :*

i. $\forall z \in \mathbb{R}, \quad \exp(z) = e^z$.
ii. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$.
iii. *pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$,
iv. *pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ *et en particulier, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, on a* $|\exp(\mathrm{i}\theta)| = 1$,
v. *pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, on a* $\exp(z) \neq 0$ *et* $[\exp(z)]^{-1} = \exp(-z)$,
vi. *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*, on a*

$$\big[\exp(z)\big]^n = \exp(nz)\,.$$

Noter qu'on notera souvent, pour $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$.

10.2.2. Définition rigoureuse de l'exponentielle et propriétés. — Il est immédiat de généraliser la notion de fonction de la variable réelle à **valeurs réelles** dérivable en la notion de fonction de la variable réelle à **valeurs complexes**. Il suffit pour cela de remplacer la valeur absolue par le module dans la définition de la limite. On vérifie aisément qu'une fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ admet une limite (resp. est continue/dérivable) en un point si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire ont une limite (resp. sont continues/dérivables) en ce point.

On peut également donner un sens à la limite, à la continuité et à la dérivabilité pour les fonctions de la variable complexe et à valeurs complexes. En particulier, la dérivabilité est définie comme suit.

Définition 10.12. — On dit que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists \eta > 0 \,, \forall z \in \mathbb{C} \,, \left(|z - z_0| \leqslant \eta \,, z \neq z_0 \Longrightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \ell \right| \leqslant \varepsilon \right) .$$

Un tel ℓ est unique, c'est la $\mathbb{C}$-dérivée de f en z_0. On note $\ell = f'(z_0)$.

10.2.2.1. *Définition.* — On a montré, dans l'Exemple 6.32, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite e^x. On note :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \,.$$

Cette formule permet d'étendre la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$ tout entier. Posons, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$E_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \,.$$

Proposition 10.13. — *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(E_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite* $\exp(z)$. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \exp(x)$. De plus, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\exp z| \leqslant e^{|z|}$.*

Démonstration. — On pose $e_k(z) = \frac{z^k}{k!}$ et on remarque que :

$$e_k(z) = a_k(z) + ib_k(z) \,, \quad a_k(z) = \operatorname{Re} e_k(z) \,, b_k(z) = \operatorname{Im} e_k(z) \,.$$

De plus, si on pose, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a_+ = \max(a, 0)$ et $a_- = \max(-a, 0)$, alors on obtient

$$a = a_+ - a_- \,, \quad |a| = a_+ + a_- \,,$$

et donc :

$$e_k(z) = (a_k(z))_+ - (a_k(z))_- + i \left[(b_k(z))_+ - (b_k(z))_- \right] \,.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E_n(z) = A_{n,+}(z) - A_{n,-}(z) + i \left(B_{n,+}(z) - B_{n,-}(z) \right) \,,$$

où

$$A_{n,\pm}(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k(z))_\pm \,, \quad B_{n,\pm}(z) = \sum_{k=0}^{n} (b_k(z))_\pm \,.$$

Il est clair que les quatre suites $(A_{n,\pm}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_{n,\pm}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes. Elles tendent donc vers une limite finie ou $+\infty$. Montrons qu'elles sont majorées. On observe que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_{n,\pm}(z) \leqslant \sum_{k=0}^{n} |e_n(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} e_n(|z|) \leqslant e^{|z|}\,,$$

et de même :

$$B_{n,\pm}(z) \leqslant e^{|z|}\,.$$

On en déduit aisément que $(E_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et la conclusion s'ensuit en remarquant que :

$$|E_n(z)| \leqslant e^{|z|}\,.$$

□

10.2.2.2. *Propriétés.* — La fonction exponentielle vérifie de nombreuses propriétés remarquables.

Proposition 10.14. — *La fonction* exp *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en* 0 *et* $\exp'(0) = 1$.

Démonstration. — On observe que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = 1 + z + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\,,$$

et donc, pour $z \neq 0$,

$$\frac{\exp(z) - 1}{z} - 1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}\,.$$

On en tire que :

$$\left|\frac{\exp(z) - 1}{z} - 1\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|z|^{k-1}}{k!} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|z|^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant |z| e^{|z|}\,.$$

Par continuité de l'exponentielle réelle en 0, le membre de droite tend vers 0 quand z tend vers 0. □

Proposition 10.15. — *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)\,.$$

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la suite du membre de gauche converge. On observe que :

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}\,.$$

On en déduit que :

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} - \frac{1}{k!}\right| |z|^k\,.$$

On peut vérifier que, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} - \frac{1}{k!} \leqslant 0\,.$$

Ainsi, on en tire que :

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n\,.$$

Or, on a :

$$\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{|z|}{n}\right)}\,.$$

En utilisant la dérivabilité de ln en 1, on obtient que

$$n\ln\left(1+\frac{|z|}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} |z|\,.$$

Il s'ensuit que :

$$\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{|z|}-e^{|z|}=0\,.$$

□

On en déduit la proposition fondamentale suivante.

Proposition 10.16. — *Pour tout $w,z\in\mathbb{C}$, on a :* $\exp(w+z)=\exp(w)\exp(z)$.

Démonstration. — On écrit, pour tout $w,z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$,

$$\left(1+\frac{w}{n}\right)^n\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n\,. \tag{10.2.1}$$

On rappelle que, pour tout $a,b\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{n-k-1}\,.$$

On observe alors que :

$$\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^n = \frac{wz}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^k\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^{n-k-1}\,.$$

Il en découle :

$$\left|\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^n\right| \leqslant \frac{|w||z|}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)^k\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}\right)^{n-k-1}\,.$$

Ainsi, on a :

$$\left|\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^n\right| \leqslant \left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}\right)^n\,.$$

On remarque alors que :

$$\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{|w|+|z|}\,,$$

en utilisant la dérivabilité de ln en 1. De même, on a :

$$\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{|w|+|z|}\,.$$

On en conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^n\right\}=0\,.$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite dans (10.2.1) et utiliser la Proposition 10.15. □

Proposition 10.17. — *La fonction* exp *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en tout point de* $\mathbb{C}$ *et, pour tout* $z\in\mathbb{C}$*,* $\exp'(z)=\exp(z)$*.*

Démonstration. — On sait que le résultat est vrai en 0 (cf. Proposition 10.14). Soit $z_0\in\mathbb{C}$. On écrit, pour $z\neq 0$,

$$\frac{\exp(z_0+z)-\exp(z_0)}{z}=\exp(z_0)\frac{\exp z-1}{z}\,,$$

par la Proposition 10.16. Le résultat s'en déduit en passant à la limite $z\to 0$. □

En adaptant le théorème de dérivation des composées de fonctions dérivables (Proposition 5.12) à la $\mathbb{C}$-dérivabilité, on obtient la proposition suivante.

Proposition 10.18. — *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non vide. Si* $\phi : I\to\mathbb{C}$ *est dérivable et si* $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en tout point, alors* $t\mapsto f(\phi(t))$ *est dérivable sur* I *et de dérivée* $t\mapsto\phi'(t)f'(\phi(t))$*.*

On en déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 10.19. — *La fonction* $f:\mathbb{R}\ni x\mapsto e^{ix}\in\mathbb{C}$ *est dérivable en tout point de* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x)=ie^{ix}$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$*. De plus, pour tout* $x\in\mathbb{R}$*,*

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\,.$$

Démonstration. — La fontion $f:\theta\mapsto e^{ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=if(x)$. Notant $f=f_1+if_2$ où f_1 et f_2 sont réelles, on trouve

$$f_1'=-f_2\,,\quad f_2'=f_1\,.$$

Cela fournit $f_1''+f_1=0$ et $f_2''+f_2=0$. On observe aussi que $f(0)=1$ et $f'(0)=i$, ce qui donne :

$$f_1(0)=0\,,\quad f_2(0)=0\,,\quad f_1'(0)=0\,,\quad f_2'(0)=1\,.$$

Il ne reste qu'à appliquer le résultat de l'Exemple 5.31 pour voir que $f_1(\theta)=\cos\theta$ et $f_2(\theta)=\sin\theta$. □

Nous avons maintenant le moyen de prouver la Proposition 10.10 admise plus tôt.

Démonstration. — Soit f satisfaisant les propriétés de la Proposition 10.10, avec f non nulle. On a $f(0)^2=f(0)$. On a donc $f(0)=1$ ou $f(0)=0$. Si on a $f(0)=0$, on déduit que f est identiquement nulle. Ainsi, $f(0)=1$. On introduit alors la fonction auxiliaire :

$$\forall z\in\mathbb{C}\,,\quad g(z)=f(z)\exp(-z)\,.$$

On a encore, pour tout $w,z\in\mathbb{C}$, $g(w+z)=g(w)g(z)$. La fonction g est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 et $g'(0)=0$. On peut alors utiliser le même argument que dans la preuve de la Proposition 10.17 pour déduire que g est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathbb{C}$ et que $g'(z)=0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. On en déduit (conséquence de la Proposition 10.18, admis) que g est constante égale à $g(0)=1$. □

10.2.2.3. *Surjectivité de l'exponentielle.* —

Proposition 10.20. — *La fonction* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est surjective.*

Démonstration. — Pour $z \in \mathbb{C}$ qui n'est pas un réel négatif, on pose [1] :

$$Z = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)}\mathrm{d}t\,.$$

On vérifie facilement que cette intégrale est bien définie. On montre que

$$\exp(Z) = z\,.$$

Pour cela, on introduit l'intégrale suivante (d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$) :

$$f(u) = \int_0^u \frac{z-1}{1+t(z-1)}\mathrm{d}t\,.$$

La fonction $u \mapsto \exp(f(u))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f'(u)\exp(f(u)) = \exp(f(u))\frac{z-1}{1+u(z-1)}\,.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\exp(f(u))'(1+u(z-1)) = \exp(f(u))(z-1)\,,$$

ou encore :

$$\left(\frac{\exp(f(u))}{1+u(z-1)}\right)' = 0\,.$$

En prenant la valeur en 0, on trouve :

$$\exp(f(u)) = 1+u(z-1)\,.$$

Alors, on a : $\exp(Z) = z$. Tous les nombres complexes non négatifs sont donc atteints par l'exponentielle. Si $a \in \mathbb{R}_-^*$, on écrit : $a = i^2 b$ avec $b = -a > 0$. On peut écrire $b = \exp(Z)$. Mais, on peut aussi écrire $i = \exp(Z')$ et donc $i^2 = \exp(2Z')$. Par conséquent, on a $a = \exp(Z + 2Z')$. □

10.2.2.4. *Qu'est-ce que* π *?* — Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 10.21 **(Division euclidienne).** — *Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. Alors, il existe un unique couple $(m,r) \in \mathbb{N} \times [0,y[$ tel que :*

$$x = my + r\,.$$

Démonstration. — On introduit

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x - ny \geqslant 0\} \subset \mathbb{N}\,.$$

A est une partie non vide et majorée (dès que n dépasse strictement la partie entière de $\frac{x}{y}$, n n'appartient pas à A) de l'ensemble des entiers naturels. Elle admet donc un plus grand élément qu'on note m. On a par définition $x - my \geqslant 0$ et $x-(m+1)y < 0$. On pose donc $r = x - my$ et on a bien $r \in [0,y[$. Montrons l'unicité d'un tel couple (m,r). Soit un autre couple $(\tilde{m},\tilde{r})$ avec les mêmes propriétés. On aurait :

$$x = my + r = \tilde{m}y + \tilde{r}\,,$$

avec $r,\tilde{r} \in [0,y[$ et $m,\tilde{m} \in \mathbb{N}$. On doit donc avoir $|\tilde{r} - r| < y$. Mais, si $m \neq \tilde{m}$, on a $|r - \tilde{r}| \geqslant y$. On a donc $m = \tilde{m}$ et par suite $r = \tilde{r}$. □

Proposition 10.22 **(Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$).** — *Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et telle que, pour tout $x, y \in A$, $x - y \in A$. Alors, nous avons :*

1. L'intégrale d'une fonction continue f sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est par définition $\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i\int_a^b \operatorname{Im} f$.

i. *soit A est dense dans $\mathbb{R}$ (tout intervalle non vide contient un élément de A),*

ii. *soit il existe $a \geqslant 0$ tel que : $A = a\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — A n'étant pas vide, il contient un certain x_0 et par conséquent il contient $x_0 - x_0 = 0$ et par suite A est stable par passage à l'opposé et par conséquent par l'addition :

$$\forall (x, y) \in A^2\,, \quad -x \in A \,\text{et}\, x + y \in A\,.$$

Supposons que A ne soit pas réduit à $\{0\}$. A contient donc un élément non nul (ainsi que son opposé) et donc un élément strictement positif. L'ensemble $A \cap]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ est donc non vide et minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure $a \geqslant 0$.

i. Supposons que $a = 0$. Montrons que A est dense. Montrons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $0 \leqslant x < y$, il existe $a' \in A$ tel que $x < a' < y$. Soit $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$. Par définition de a, il existe $\tilde{a} \in A$ tel que $0 < \tilde{a} < \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $n\tilde{a} \leqslant x$. Alors, on a $(n+1)\tilde{a} > x$. De plus, $n\tilde{a} + \tilde{a} \leqslant x + \frac{y-x}{2} < y$. Or $(n+1)\tilde{a} \in A$ du fait de la stabilité de A par l'addition. On a bien trouvé un élément de A entre deux nombres positifs distincts. La stabilité par passage à l'opposé permet de montrer que tout segment inclus dans $] -\infty, 0]$ contient un élément de A. Enfin, un intervalle $[a, b]$ avec $a < 0 < b$ contient toujours $0 \in A$.

ii. Supposons que $a > 0$. Montrons que $A = a\mathbb{Z}$. On commence par montrer que $a \in A$. Si tel n'est pas le cas, il existe $a' \in A$ tel que $a < a' \leqslant \frac{3a}{2}$, par définition de la borne inférieure. Pour la même raison, on peut encore trouver $a'' \in A$ tel que $a < a'' < a'$. Alors, on a $0 \leqslant a' - a'' \leqslant \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2} < a$ et $a' - a'' \in A \cap]0, +\infty[$. Cela contredit la définition de a. On a donc montré que $a \in A$. On en déduit que $a\mathbb{Z} \subset A$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in A$ avec $x \geqslant 0$. Par le Lemme 10.21, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, a[$ tels que $x = ma + r$. Or $ma \in A$ et donc $r = x - ma \in A$. Par définition de a, on doit avoir $r = 0$ (sinon on aurait trouvé un élément non nul plus petit que la borne inférieure) ; cela signifie que $x \in a\mathbb{Z}$. Soit $x \in A$ avec $x \leqslant 0$. On a $-x \in A$ et $-x \geqslant 0$ et donc $-x \in a\mathbb{Z}$ si bien que $x \in a\mathbb{Z}$. On en déduit que $A \subset a\mathbb{Z}$.

$\square$

***Proposition 10.23* (caractérisation de π).** — *Posons $\mathcal{P} = \{\theta \in \mathbb{R} : e^{\mathrm{i}\theta} = 1\}$. On a les propriétés suivantes :*

i. $0 \in \mathcal{P}$.

ii. *Pour tous $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, si $\theta_1 \in \mathcal{P}$ et $\theta_2 \in \mathcal{P}$, alors $\theta_1 - \theta_2 \in \mathcal{P}$.*

De plus, il existe un unique réel strictement positif p tel que :

$$\mathcal{P} = p\mathbb{Z} = \{pk, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

On note :

$$\pi = \frac{p}{2}\,.$$

En particulier, on a :

$$e^{2\mathrm{i}\pi} = 1\,.$$

Démonstration. — On définit

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 1\}\,.$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ contient 0 et est stable par différence. On peut appliquer la Proposition 10.22. Si A est dense, cela signifie que tout réel α est limite d'une suite (x_n) d'éléments de A. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{ix_n} = 1$. En utilisant la continuité de l'exponentielle complexe (qui est une conséquence de la $\mathbb{C}$-dérivabilité), on en déduit que : $e^{i\alpha} = 1$ par passage à la limite. Ainsi, on a $\alpha \in \mathcal{P}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On aurait alors $e^{ix} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dérive alors cette identité au moyen de la Proposition 10.18 et une contradiction s'ensuit. Il doit donc exister $p \geqslant 0$ tel que $\mathcal{P} = p\mathbb{Z}$. Il suffit de montrer que p n'est pas nul. Par surjectivité de l'exponentielle, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $i = \exp(\alpha)$. On en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $e^{ix_0} = i$ et donc $e^{4ix_0} = 1$, soit $4x_0 \in A$. A n'est donc pas réduit à 0. □

10.2.3. Les fonctions trigonométriques cosinus et sinus, le nombre π. — Dans ce paragraphe, nous résumons les relations importantes entre l'exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques usuelles. On pourra consulter la section précédente si on veut trouver des démonstrations.

Proposition 10.24. — *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right), \qquad \sin(\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right),$$

et on a en particulier la formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).$$

Grâce à la proposition 10.23, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 10.25. — *Nous avons les formules suivantes.*

i. $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ *; ou encore :* $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

ii. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2\mathrm{i}n\pi} = e^z$.*

iii. $\left\{x \in \mathbb{R}, e^{\mathrm{i}x} = 1\right\} = \left\{2\pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

iv. *Pour tout $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(z) = e^x\big(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\big). \tag{10.2.2}$$

v. *Formule de Moivre : pour tous $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$*

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx).$$

On remarquera que, sous réserve qu'on sache définir les fonctions cosinus et sinus, la formule (10.2.2) permet de définir l'exponentielle d'un nombre complexe.

Exemple 10.26. — Montrer que la fonction cos est paire et que la fonction sin est impaire. Montrer que les zéros de la fonction sin sont exactement les nombres $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et ceux de cos les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 10.27. — *Les fonctions cosinus et sinus jouissent des propriétés algébriques suivantes :*

i. *pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,* $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,

ii. *pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,* $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$,

iii. cos *et* sin *sont 2π-périodiques,*

iv. *pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,* $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Exemple 10.28. — Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

10.2.4. Développement et linéarisation pour le cosinus et le sinus. — Nous rappelons la formule de Moivre vue auparavant. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n .$$

Cette formule est commode pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, à partir du moment où on se souvient de la formule du binôme de Newton (mais on peut bien sûr fair elles calculs à la main sans connaître la formule !).

Proposition 10.29. — *Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} ,$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et et pour $n \geqslant 1$ on définit $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ comme la multiplication de tous les entiers de 1 à n. Pour $n = 0$, on fait la convention $0! = 1$.

Exemple 10.30. — Vérifier que

$$1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta .$$

En reprenant la formule de Moivre avec $n = 3$ combinée avec la formule du binôme de Newton, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta) &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta + 3\mathrm{i}^2\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{i}^3\sin^3\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) .
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles des deux membres ainsi que les parties imaginaires on obtient

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\
\sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta .
\end{aligned}$$

Pour aller un peu plus loin, nous pouvons utiliser la formule du binôme et obtenir la proposition suivante.

***Proposition 10.31* (Polynômes de Tchebychev).** — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sin((n+1)x) = \sin x \, U_n(\cos x) , \quad \cos(nx) = T_n(\cos x) ,$$

où

$$U_n(X) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n+1}{2\ell+1} X^{n-2\ell}(1-X^2)^\ell ,$$

et

$$T_n(X) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} X^{n-2\ell}(1-X^2)^\ell .$$

Démonstration. — On écrit

$$\sin((n+1)x) = \mathrm{Im}\,(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{n+1} = \mathrm{Im} \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{i}^k \binom{n+1}{k} \cos^{n+1-k} x \sin^k x .$$

On ne garde que les termes imaginaires purs et on a :

$$\sin((n+1)x) = \sin x \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n+1} \mathrm{i}^{k-1} \binom{n+1}{k} \cos^{n+1-k} x \sin^{k-1} x .$$

En réécrivant cette somme, on en déduit le résultat. On procède de même pour le cosinus. □

Inversement, on peut tâcher d'exprimer $\cos^n \theta$ en fonction de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$; cette procédure est appelée linéarisation. Elle est basée sur la proposition élémentaire suivante.

Proposition 10.32. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Exemple 10.33. — Nous allons linéariser $\cos^3\theta$. A cet effet on écrit via la formule du binôme

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \frac{1}{8}\big(e^{3\mathrm{i}\theta} + 3e^{\mathrm{i}\theta} + 3e^{-\mathrm{i}\theta} + e^{-3\mathrm{i}\theta}\big)\\ &= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(3\theta)\end{aligned}$$

L'exemple suivant donne la linéarisation de $\cos^{2n+1}\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\cos^{2n+1}\theta &= \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{(2k-2n-1)\mathrm{i}\theta}\\ &= \frac{1}{2^{2n+1}}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}e^{(2k-2n-1)\mathrm{i}\theta} + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}e^{(2k-2n-1)\mathrm{i}\theta}\Big)\end{aligned}$$

En faisant dans la deuxième somme le changement d'indice $j = 2n+1-k$ tout en remarquant que

$$\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{j},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\cos^{2n+1}\theta &= \frac{1}{2^{2n+1}}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}e^{(2k-2n-1)\mathrm{i}\theta} + \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{j}e^{(2n+1-2j)\mathrm{i}\theta}\Big)\\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos[(2n+1-2k)\theta].\end{aligned}$$

10.2.5. Forme exponentielle d'un nombre complexe. — Nous admettrons la proposition suivante qui concerne une propriété fondamentale de l'exponentielle.

Proposition 10.34. — *La fonction* exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est surjective. Autrement dit, pour tout $z' \in \mathbb{C}^*$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z' = \exp(z)$.*

Nous sommes maintenant armés pour comprendre la proposition suivante.

Proposition 10.35. — *(Forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique couple $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times] -\pi, \pi]$ tel que :*

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}.$$

De plus, on a $|z| = \rho$. θ est appelé argument principal de z et noté $\mathrm{Arg}(z)$. *Tous les autres $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{\mathrm{i}\alpha}$ sont de la forme* $\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$ *avec $k \in \mathbb{Z}$. Un tel α est appelé argument de z et est noté* $\arg(z)$.

Démonstration. — Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Par la proposition précédente, il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $z = \exp(w)$. On écrit $w = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et on déduit que :

$$z = e^a e^{ib}.$$

On pose $\rho = e^a > 0$. Si $b \in (-\pi, \pi]$, on pose $b = \theta$; sinon, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b + 2k\pi \in (\pi, \pi]$ et on pose $b + 2k\pi = \theta$.

Vérifions qu'un tel couple (ρ, θ) est unique. Supposons qu'on ait $(\rho, \theta), (\tilde{\rho}, \tilde{\theta}) \in]0, +\infty[\times (-\pi, \pi]$ sont tels que :

$$\rho e^{i\theta} = \tilde{\rho} e^{i\tilde{\theta}}.$$

En prenant le module, on trouve $\rho = \tilde{\rho}$ et donc $e^{i\theta} = e^{i\tilde{\theta}}$ si bien qu'on déduit $e^{i(\theta - \tilde{\theta})} = 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - \tilde{\theta} = 2k\pi$. Or, on a $|\theta - \tilde{\theta}| < 2\pi$ et donc $k = 0$. □

Exemple 10.36. — On a :

$$\mathrm{Arg}(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}, \mathrm{Arg}(-1) = \pi, \mathrm{Arg}(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}, \mathrm{Arg}(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}, \mathrm{Arg}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Comme conséquence de la forme exponentielle on a les propriétés suivantes.

Corollaire 10.37. — *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors*

i. $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$,

ii. $\arg(\frac{z_1}{z_2}) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$,

iii. $\arg(z_1^n) \equiv n \arg(z_1) [2\pi]$.

Démonstration. — Les formes exponentielles de z_1 et z_2 sont données par

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1},\ z_2 = |z_2| e^{i\theta_2} \quad \text{avec} \quad r_1 = |z_1|, r_2 = |z_2|.$$

Ainsi on obtient grâce à la Proposition 10.11,

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Il s'ensuit que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (une chose qu'on connait déjà) et $\theta_1 + \theta_2$ est un argument possible de $z_1 z_2$.

Les derniers points s'obtiennent par un argument similaire tout en utilisant de manière fondamentale la Proposition 10.11. □

Exemple 10.38. — On a $\arg(\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^7}) = 5\frac{\pi}{4} - 7\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ et $\mathrm{Arg}(\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(\sqrt{3}+i)^7}) = \frac{\pi}{12}$.

10.2.6. Géométrie. — La forme exponentielle des nombres complexes est parfois appelée forme géométrique. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, nous pouvons écrire

$$z = |z| e^{i\theta} = |z| \cos\theta + \mathrm{i} |z| \sin\theta,$$

si bien que θ représente l'angle orienté entre le vecteur $(1, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. En d'autres termes, si $z = a + ib \neq 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$

Exemple 10.39. — Cherchons la forme exponentielle de $z = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$. D'abord, on a

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

D'après les propriétés de l'exponentielle, on peut écrire

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\sqrt{2}} + \mathrm{i} \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant chercher les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Pour se faire, on va calculer la forme algébrique du nombre complexe z. Cela se fait à travers un passage au conjugué de son dénominateur. Précisément, on écrit

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{|\sqrt{3}+\mathrm{i}|^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{4}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{4}. \end{aligned}$$

En identifiant les formes trigonométrique et algébrique, on trouve

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Proposition 10.40. — *Soit z un nombre complexe de partie imaginaire non nulle. On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. On a : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ et, si θ désigne l'argument principal de z, on a $\tan\theta=\frac{y}{x}$.*

***Proposition 10.41* (Formule du losange).** — *Soient $a,b\in\mathbb{R}$. On a :*

$$e^{ia}+e^{ib}=2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Pour illustrer une nouvelle fois la puissance de l'interprétation géométrique des nombres complexes, nous allons montrer la proposition suivante.

***Proposition 10.42* (Théorème de l'angle au centre)**
Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On a :

$$\tan\left(\frac{\mathrm{Arg}z}{2}\right)=\frac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z+|z|}.$$

Démonstration. — Écrivons $z=x+\mathrm{i}y=re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $r=|z|,\theta=\mathrm{Arg}z\in\,]-\pi,\pi[$. Alors l'identité devient

$$\tan(\theta/2)=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Supposons d'abord que $x>0$ et rappelons que $\tan\theta=\frac{y}{x}$, alors l'identité à démontrer se réécrit

$$\tan(\theta/2)=\frac{y}{x+x\sqrt{1+(y/x)^2}}$$

ou encore, en factorisant par x,

$$\tan(\theta/2)=\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}}.$$

Comme on a supposé que $x>0$, on a $\cos\theta\geqslant 0$ et

$$\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}.$$

En utilisant les identités de l'Exemple 10.30, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \tan\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat désiré. Dans le cas où $x\leqslant 0$, ce qui revient à supposer que $\cos\theta\leq 0$, la même démarche donne la même formule. □

10.3. Racines

10.3.1. Racines carrées : préliminaires. — On sait trouver les racines carrées des nombres réels positifs. Soit $r > 0$. Alors l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = r$ possède exactement une solution positive notée $\sqrt{r} \geqslant 0$ et une solution négative qui vaut $-\sqrt{r} \leqslant 0$. Cela vient notamment du fait que $]0, +\infty[\ni x \mapsto x^2 \in]0, +\infty[$ est une bijection (continue et strictement croissante).

Si on cherche les $z \in \mathbb{C} : z^2 = r$, on se ramène à $z^2 - (\sqrt{r})^2 = 0$ et on factorise : $(z - \sqrt{r})(z + \sqrt{r}) = 0$. On en déduit, par la Proposition 10.2, que $z = \sqrt{r}$ ou $z = -\sqrt{r}$.

En fait, on sait aussi trouver facilement les racines carrées des nombres négatifs. Soit $r \geqslant 0$. Cherchons les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = -r$. On écrit $-1 = i^2$ et l'équation est équivalente à $z^2 = i^2 r = (i\sqrt{r})^2$. En factorisant, on en déduit que $z = i\sqrt{r}$ ou $z = -i\sqrt{r}$.

10.3.2. Racines carrées : cas général. — Examinons à présent le cas général.

Proposition 10.43. — *Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} c \neq 0$. Les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = c$ sont exactement les nombres*

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$$

et

$$-\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que $c = a + ib$. En particulier, il n'y a qu'une seule solution de partie réelle positive.

Démonstration. — On suppose que c est de partie imaginaire non nulle. On écrit $c = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ et $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On cherche donc x et y. L'équation est équivalente à :

$$(x + iy)^2 = a + ib,$$

ou encore à :

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b. \tag{10.3.1}$$

Comme b est non nul, les possibles x et y ne le sont pas non plus. L'équation du module tirée de $z^2 = c$ donne

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{10.3.2}$$

En sommant la première équation de (10.3.1) et (10.3.2), on obtient

$$x^2 = \frac{1}{2}\Big(a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big), y = \frac{b}{2x}. \tag{10.3.3}$$

Il s'ensuit qu'il y a deux solutions données par

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big)},\ y = \frac{b}{2\sqrt{\frac{1}{2}\Big(a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big)}}$$

et

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}\Big(a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big)},\ y = -\frac{b}{2\sqrt{\frac{1}{2}\Big(a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big)}}$$

□

10.3.3. Équations du second degré. — Nous allons maintenant généraliser la Proposition 1.14 en résolvant les équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$. Mais d'abord, nous allons étendre un peu la Proposition 1.14 en donnant les solutions dans $\mathbb{C}$ quand $\Delta < 0$.

Proposition 10.44. — *On reprend les notations et les hypothèses de la Proposition 1.14. Quand $\Delta < 0$, il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$ à l'équation $az^2 + bz + c = 0$ et elles sont conjuguées l'une de l'autre :*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Proposition 10.45. — *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az^2 + bz + c.$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on considère l'unique $\delta \in \mathbb{C}$ de partie réelle positive tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors

i. *quand $\Delta \neq 0$, l'équation $f(z) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$:*

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

ii. *quand $\Delta = 0$, l'équation $f(z) = 0$ n'admet qu'une seule solution dans $\mathbb{C}$:*

$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Démonstration. — On va écrire $f(z)$ comme le début d'un carré.

$$\begin{aligned} f(z) &= a\big(z^2 + \frac{b}{a}z\big) + c \\ &= a\big(z + \frac{b}{2a}\big)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\big(z + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $f(z) = 0$ est équivalente à

$$\big(z + \frac{b}{2a}\big)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \big(\frac{\delta}{2a}\big)^2,$$

et donc

$$z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a}.$$

Cela donne les seules solutions complexes. □

10.3.4. Racines de l'unité. — Nous allons maintenant examiner les racines de polynômes spéciaux de degré supérieur à 2. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 10.46. — *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. Alors l'équation*

$$z^n = 1,$$

admet exactement n solutions distinctes, notées $(z_k)_{k=0,\dots,n-1}$ dont les expressions sont :

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Les points M_k d'affixes z_k appartient au cercle de rayon 1 *de centre* $(0,0)$ *et forment un polygone régulier à $n-1$ côtés. De plus*

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0.$$

Démonstration. — Il est aisé de vérifier que les z_k sont en effet des solutions. Montrons que ce sont les seules par une méthode explicite. On remarque déjà que, si z est solution, on a $|z^n| = 1$, et donc $|z|^n = 1$ si bien que $|z| = 1$. Les solutions sont de module 1. Il existe donc $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi, l'équation devient $e^{in\theta} = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n\theta = 2k\pi$. Ainsi, cela montre que l'ensemble des solutions est

$$\left\{ z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Or, on remarque que $z_{k+n} = z_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on a

$$\left\{ z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Pour $k, \ell \in \{0, \ldots, n-1\}$ tels que $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}$, on déduit que $\frac{k-\ell}{n} \in \mathbb{Z}$ et donc $k = \ell$. Les $(z_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ sont donc distincts.

Concernant l'affirmation sur le polygone, nous allons calculer la distance entre M_k et M_{k+1} pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et démontrer qu'elle ne dépend pas de k. Cette distance est le module $|z_{k+1} - z_k|$. Noter que $z_n = z_0 = 1$. Or, par la Proposition 10.41, on a

$$z_{k+1} - z_k = e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}},$$

où $a = \frac{2(k+1)\pi}{n}$, $b = \pi + \frac{2k\pi}{n}$. On en déduit donc que :

$$|z_{k+1} - z_k| = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right).$$

Ce nombre est indépendant de k.
Reste à vérifier le dernier point concernant la somme des z_k. Géométriquement ce point représente le centre de gravité du polygone régulier. On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} z_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{2i\pi}{n}})^k \\ &= \frac{1 - (e^{\frac{2i\pi}{n}})^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \\ &= \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notons que nous avons utilisé la propriété suivante des suites géométriques de raison $r \neq 1$: pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant m$,

$$\sum_{k=m}^{n} r^n = r^m \frac{1 - r^{n-m+1}}{1 - r}.$$

□

Exemple 10.47. — Résoudre dans $\mathbb{C}$: $1 + z + z^2 + z^3 = 0$.

10.3.5. Racines n-ième d'un nombre complexe. — Nous allons généraliser la Proposition 10.46 en fournissant les racines n-ième d'un nombre complexe.

Proposition 10.48. — *Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. L'équation $z^n = w$ admet n solutions distinctes données par :*

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg w}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Démonstration. — On écrit $w = |w|e^{i \arg w}$ et en divisant par w, on en déduit que

$$\left(\frac{z}{|w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z}{n}}}\right)^n = 1.$$

On applique alors le résultat de la Proposition 10.46. $\square$

Exemple 10.49. — Trouver les racines 4-ièmes de $(1+i)^3$.

CHAPITRE 11

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Dans cette section, nous allons étudier les propriétés de certaines fonctions particulières qu'on rencontre à de nombreuses occasions. Nous supposerons familières les notions de polynômes et de fractions rationnelles. Dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

11.1. Polynômes

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication (commutatives) supposées connues.

Définition 11.1. — Dans $\mathbb{K}[X]$, X s'appelle l'indéterminée.

Exemple 11.2. — On pose $P = 1+X+X^2$ et $Q = 1-X$. Alors $P+Q = Q+P = 2+X^2$ et $PQ = QP = 1-X^3$.

Exemple 11.3. — Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n$. Donner une expression simple pour $(1-X)P_n$.

Exemple 11.4. — Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $X^n - a^n = (X-a)Q$.

Proposition 11.5. — *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe une unique suite de scalaires $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, nulle à partir d'un certain rang telle que :*

$$P = \sum_{j\geqslant 0} a_j X^j\,.$$

Cette suite est la suite des coefficients du polynôme.

Proposition 11.6. — *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul. On écrit $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ et on considère*

$$A = \{j \in \mathbb{N} : a_j \neq 0\}\,.$$

A possède un plus grand élément qui s'appelle le degré de P, noté $\deg P$. *Le coefficient $a_{\deg P} \neq 0$ s'appelle le coefficient dominant de P.*

Définition 11.7. — Lorsque $P = 0$, on écrit $\deg P = -\infty$.

Exemple 11.8. — Si $P = 2+X+X^4$, alors $\deg P = 4$. Si $P = X^6 - \pi X + 3X^2 + X^5$, $\deg P = 6$.

Proposition 11.9. — *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors P s'écrit sous la forme*

$$P = \sum_{j=0}^{\deg P} a_j X^j\,.$$

Proposition 11.10. — *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors*

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q\,, \quad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)\,.$$

Exemple 11.11. — On prend $P = -2X^2 + X + 1$ et $Q = 2X^2 + 3$. Quel est le degré de $P + Q$?

11.2. Racines

11.2.1. Définitions. — À tout polynôme, on peut associer une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{K}$.

Définition 11.12. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La fonction $\mathbb{K} \ni x \mapsto P(x) = \sum_{j=0}^{\deg P} a_j x^j \in \mathbb{K}$ s'appelle la fonction polynomiale associée à P.

Définition 11.13. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $x_0 \in \mathbb{K}$ est racine de P lorsque $P(x_0) = 0$.

Exemple 11.14. — Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, trouver les racines de $X^2 + X + 2$.

Exemple 11.15. — Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, trouver les racines de $X^2 + X + 2$.

Exemple 11.16. — Trouver les racines dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^2 - a$ où a est un nombre complexe fixé.

Exemple 11.17. — Trouver les racines dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré 2.

Proposition 11.18. — *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$ une racine de P. Alors, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - x_0)Q$.*

Définition 11.19. — On dit que $x_0 \in \mathbb{K}$ une racine de P de multiplicité $m \geqslant 1$ lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - x_0)^m Q\,, \qquad Q(x_0) \neq 0\,.$$

On dit aussi que x_0 est une racine multiple d'ordre m. Une racine est dite simple lorsqu'elle est de multiplicité 1.

11.2.2. Notion de polynôme dérivé et relation avec les racines. —

Définition 11.20. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On écrit

$$P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j\,.$$

Le polynôme dérivé de P est défini par

$$P' = \sum_{j=1}^{n} j a_j X^{j-1}\,.$$

Proposition 11.21. — *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors*

$$(P+Q)' = P' + Q'\,, \quad (PQ)' = P'Q + PQ'\,.$$

Exemple 11.22. — Quel est le polynôme dérivé de $(X - a)^m$, où $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$?

Proposition 11.23. — *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ une racine de P. Alors, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$P = (X - a)Q\,,$$

avec $Q(a) = P'(a)$.

Proposition 11.24. — *Si x_0 est racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité m, alors elle est racine de P' avec multiplicité $m-1$.*

11.2.3. Polynômes scindés. —

Proposition 11.25. — *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré $n \geqslant 1$. Alors P possède au plus n racines dans $\mathbb{K}$ (avec multiplicité).*

Corollaire 11.26. — *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ qui possède une infinité de racines est nul.*

***Théorème 11.27* (D'Alembert-Gauss).** — *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant possède une racine dans $\mathbb{C}$.*

Corollaire 11.28. — *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant est scindé dans $\mathbb{C}$, c'est à dire qu'il existe $(r_j)_{1\leqslant j\leqslant \deg P} \in \mathbb{C}^{\deg P}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que*

$$P = c\prod_{j=1}^{\deg P}(X - r_j)\,.$$

De plus, c est le coefficient dominant de P et le nombre de fois où une racine est répétée est sa multiplicité.

***Proposition 11.29* (Relations coefficients-racines)**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On écrit $P = \sum_{\ell=0}^{\deg P} p_\ell X^\ell$. On écrit par ailleurs

$$P = c\prod_{j=1}^{\deg P}(X - r_j)\,.$$

Alors

$$p_0 = c(-1)^{\deg P}\prod_{j=1}^{\deg P} r_j\,, \qquad p_{\deg P-1} = -c\sum_{j=1}^{\deg P} r_j\,.$$

Exemple 11.30. — Écrire les relations coefficients-racines dans le cas d'un polynôme de degré 2.

11.3. Problème : développement du sinus en produit eulérien

L'objet de cette section est de montrer, par des moyens élémentaires (essentiellement l'étude des racines de polynômes), une célèbre formule d'Euler. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\,.$$

Cela s'appelle le développement du sinus en produit eulérien.

11.3.1. Une suite de polynômes introduite par Euler. — Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ impair. On pose

$$P_n(z) = \frac{\left(1 + i\frac{z}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{z}{n}\right)^n}{2i}\,.$$

i. Montrer que P_n est un polynôme impair à coefficients réels.
ii. Quel est le coefficient dominant de P_n en fonction de n et quel est le coefficient qui apparaît devant z ?
iii. Trouver toutes les racines réelles de P_n (on remarquera qu'elles sont symétriques par rapport à 0).

iv. Le lecteur curieux (et motivé) pourra s'amuser à montrer que

$$P_n(z) = z \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right).$$

v. En utilisant la Proposition 10.15, prouver que la suite $(P_n(z))$ converge vers $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

11.3.2. Une suite de polynômes introduite par Tchebychev. — On considère $n = 2m$ dans la Proposition 10.31 avec $m \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a :

$$\sin((2m+1)x) = \sin x V_{2m}(\sin x),$$

où

$$V_{2m}(X) = \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \binom{2m+1}{2\ell+1} (1-X^2)^{m-\ell} X^{2\ell}.$$

i. Montrer que les nombres $\pm \sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$ pour $k \in \{1, \dots, m\}$ sont des racines réelles de V_{2m}. En examinant la valeur en 0 de V_{2m} et son degré, expliquer pourquoi :

$$V_{2m}(X) = (2m+1) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{X^2}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right).$$

ii. Admettant cette factorisation, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = (2m+1) \sin\left(\frac{x}{2m+1}\right) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2m+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right).$$

En déduire que, pour $x \in [0, \pi]$ et $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$, on a :

$$\sin x \leqslant x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

On pourra utiliser l'Exemple 5.36.

iii. En utilisant la suite de polynômes (P_n) de la section précédente, montrer que, pour $x \in [0, \pi]$ et $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$,

$$\sin x \leqslant x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leqslant P_{2m+1}(x).$$

On pourra utiliser l'Exemple 5.37.

iv. Conclure.

11.4. Divisibilité des polynômes

Définition 11.31. — On dit que $B \in \mathbb{K}[X]$ divise $A \in \mathbb{K}[X]$ lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On dit que B est un diviseur de A.

Exemple 11.32. — Tout polynôme constant et non nul divise n'importe quel polynôme.

Exemple 11.33. — Si x_0 est racine de $A \in \mathbb{K}[X]$, alors $X - x_0$ divise A.

Exemple 11.34. — Montrer que $X^2 - 2$ divise $X^4 - X^2 - 2$.

Proposition 11.35 **(Division euclidienne des polynômes)**
Soient $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$*, avec* $B \neq 0$*. Alors il existe un unique couple* $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ *avec* $\deg R < \deg B$ *tel que*

$$A = BQ + R\,.$$

Q s'appelle le quotient et R le reste.

Exemple 11.36. — On prend $A = X^4 - 2X^2 + X - 3$ et $B = X^2 + 1$. Trouver Q et R.

11.5. Polynômes irréductibles et factorisation

11.5.1. Irréductibilité. —

Définition 11.37. — On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsqu'il ne peut pas s'écrire comme le produit de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés au moins 1.

Exemple 11.38. — $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 11.39. — *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{C}[X]$ *sont de degré* 1.

Proposition 11.40. — *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont soit les polynômes de degré* 1*, soit les polynômes de degré* 2 *n'ayant aucune racine réelle.*

Proposition 11.41. — *Tout polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *non constant est divisible par un polynôme irréductible.*

Proposition 11.42. — *Soit* $H_1 \in \mathbb{K}[X]$ *et* $H_2 \in \mathbb{K}[X]$ *deux polynômes irréductibles. Si* H_1 *divise* H_2*, alors il existe* $c \in \mathbb{K}$ *tel que*

$$H_2 = cH_1\,.$$

11.5.2. Polynômes premiers entre eux. —

Définition 11.43. — On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux lorsqu'ils ne possèdent pas de diviseur commun autre que les polynômes constants.

Proposition 11.44. — $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de facteur irréductible commun.*

Proposition 11.45. — $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune dans* $\mathbb{C}$*. En particulier, deux polynômes à coefficients réels sont premiers entre eux sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement s'ils sont premiers entre eux sur* $\mathbb{C}$*.*

Exemple 11.46. — $X^2 - 2$ et $X^2 + 2$ sont premiers entre eux.

11.5.3. Décomposition en produit d'irréductibles. —

Proposition 11.47. — *Tout polynôme* P *de* $\mathbb{K}[X]$ *peut se factoriser sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles mutuellement premiers entre eux (c'est à dire sans racine commune) :*

$$P = \prod_{j=1}^{k} H_j^{m_j}\,.$$

Cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près et à multiplication d'une constante près.

Exemple 11.48. — Factoriser en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^3 + X - 2$. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 11.49. — *$P \in \mathbb{K}[X]$ n'a que des racines de multiplicité 1 si et seulement si P et P' sont premiers entre eux.*

11.6. Notion de PGCD de polynômes

Proposition 11.50. — *Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$\mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B = D\mathbb{K}[X]\,. \tag{11.6.1}$$

D est unique à une constante multiplicative près. Le polynôme D satisfaisant (11.6.1) *et de coefficient dominant égal à 1 est noté $A \wedge B$.*

Proposition 11.51. — *Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que*

$$A \wedge B = AU + BV\,.$$

Proposition 11.52. — *Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. Alors $A \wedge B$ divise A et B. De plus, tout diviseur commun à A et B divise $A \wedge B$.*

Proposition 11.53. — *Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. On note $\mathcal{D}(A, B)$ l'ensemble des diviseurs communs à A et B. On considère un polynôme $P \in \mathcal{D}(A, B)$ de degré maximal et de coefficient dominant 1. Alors $P = A \wedge B$. En particulier, à une constante multiplicative près, $\mathcal{D}(A, B)$ ne possède qu'un élément de degré maximal.*

Démonstration. — On a $\deg P \geqslant \deg(A \wedge B)$ et $A \wedge B$ divise P. Il existe donc $c \in \mathbb{K}$ tel que $P = c(A \wedge B)$. □

Définition 11.54. — $A \wedge B$ est appelé plus grand commun diviseur (PGCD) de A et B. On dit que A et B sont premiers entre eux lorsque leur PGCD vaut 1 (c'est à dire quand ils ne possèdent pas de diviseur commun autre que les constantes).

11.7. Fractions rationnelles

11.7.1. Propriétés générales. — On considère maintenant l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est l'ensemble des "quotients" de polynômes

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q}, \quad (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \right\}.$$

On a $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$. Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication supposés familières. Si $F \in \mathbb{K}(X)$, elle s'écrit sous la forme

$$F = \frac{P}{Q}$$

avec P et $Q \neq 0$ deux polynômes. Lorsque F est écrite sous cette forme, on dit que P est le numérateur et Q le dénominateur. On observe cependant que cette écriture n'est pas unique (on peut parfois "simplifier la fraction").

Exemple 11.55. — Écrire la fraction rationnelle suivante sous la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes :

$$X + \frac{1}{X} + \frac{X+1}{X-2} + \frac{X^2}{X-1}\,.$$

Exemple 11.56. — On a

$$\frac{X^3-1}{X-1} = \frac{X^2+X+1}{1} = X^2 + X + 1\,.$$

Définition 11.57. — On dit que $F \in \mathbb{K}(X)$ est écrite sous forme irréductible lorsqu'elle se présente sous la forme

$$F = \frac{P}{Q},$$

où P et Q n'ont pas de diviseurs communs.

Exemple 11.58. — Écrire les fractions suivantes sous une forme irréductible :

$$\frac{X^3 - 3X^2 + X + 1}{X^2 - 1}, \qquad \frac{X^2 + 4}{X^4 + 1}.$$

Exemple 11.59. — Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qui n'a que des racines de multiplicité 1. Alors, la fraction $\frac{P'}{P}$ est irréductible.

Proposition 11.60. — *Si $F \in \mathbb{K}(X)$ et qu'on l'écrit $F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$, on a $\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$. Cette valeur commune est le degré de F.*

Exemple 11.61. — Donner le degré de $\frac{X^2}{X-1}$, $\frac{1}{X}$.

11.7.2. Racines et pôles. —

Lemme 11.62. — *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ écrite de façon irréductible $F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$. Alors les racines de P_1 et les racines de P_2 sont les mêmes (avec multiplicité). Il en est de même pour les racines de Q_1 et Q_2.*

Définition 11.63. — Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ écrite de façon irréductible $F = \frac{P}{Q}$. On appelle racines de F les racines de P et pôles de F les racines de Q. Un pôle d'ordre m de F est une racine d'ordre m de Q.

Définition 11.64. — Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ écrite de façon irréductible $F = \frac{P}{Q}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F. On peut définir la fontion rationnelle $f : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \ni x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ associée à F.

11.7.3. Décomposition en éléments simples. —

Exemple 11.65. — Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que

$$\frac{X^3}{(X-1)(X-2)} = aX + b + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X-2}.$$

Nous allons montrer que cet exemple reflète une propriété générale, appelée décomposition en éléments simples.

Lemme 11.66. — *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ avec $\deg F \geqslant 1$. Il existe un unique polynôme P de degré $\deg F$ et une unique fraction rationnelle G telle que $\deg G < 0$ telle que*

$$F = P + G.$$

P s'appelle la partie entière de F.

Exemple 11.67. — On pose $F = \frac{1}{X}$, trouver P et G. Même question avec $F = \frac{X^5+1}{(X+2)^2}$.

Lemme 11.68. — *Soit $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$. Supposons que A et B sont étrangers. Alors, il existe un unique couple de polynômes $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $\deg Q_1 < \deg A$ et tels que*

$$\frac{P}{AB} = \frac{Q_1}{A} + \frac{Q_2}{B}.$$

Exemple 11.69. — On prend $P = X$, $A = X - 1$ et $B = (X-2)^2$. Trouver les polynômes Q_1 et Q_2.

Lemme 11.70. — *Soit $P, H \in \mathbb{K}[X]$ avec H irréductible. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que* $\deg \frac{P}{H^n} < 0$. *Alors il existe un unique n-uplet de polynômes $(P_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tel que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,* $\deg P_j < \deg H$ *et*

$$\frac{P}{H^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j}{H^j} .$$

Exemple 11.71. — On prend $P = X^2$, $H = X-1$ et $n = 3$. Trouver les polynômes P_j.

***Théorème 11.72* (Décomposition en éléments simples)**
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit

$$F = \frac{P}{Q} ,$$

On décompose Q en produit de polynômes d'irréductibles :

$$F = \frac{P}{\prod_{j=1}^{k} H_j^{m_j}} .$$

Il existe un unique polynôme P_0 (la partie entière de F) et une unique famille de polynômes $(Q_{j,\ell})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ 1 \leqslant \ell \leqslant m_j}}$ avec $\deg Q_{j,\ell} < \deg H_j$ *et telle que*

$$F = P_0 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{Q_{j,\ell}}{H_j^{\ell}} .$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le théorème prend la forme suivante.

***Théorème 11.73* (Décomposition en éléments simples)**
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On écrit

$$F = \frac{P}{Q} .$$

On suppose que Q s'écrit

$$\prod_{j=1}^{k} (X - \alpha_j)^{m_j} ,$$

où les α_j sont les racines distinctes de Q.

Il existe un unique polynôme P_0 (la partie entière de F) et une unique famille de nombres complexes $(Q_{j,\ell})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ 1 \leqslant \ell \leqslant m_j}}$ telle que

$$F = P_0 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{Q_{j,\ell}}{(X - \alpha_j)^{\ell}} .$$

Exemple 11.74. — La fraction suivante est-elle irréductible ? Quels sont ses racines, ses pôles (et leurs ordres) ? La décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\frac{X^4}{(X^2+1)(X-1)} .$$

Exemple 11.75. — Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction

$$\frac{X^4}{(X^2+1)(X-1)^2} .$$

Exemple 11.76. — Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction

$$\frac{X^4}{(X^2+1)(X-1)}\,.$$

Proposition 11.77. — *Si $F \in \mathbb{K}(X)$, on écrit de façon irréductible $F = \frac{P}{Q}$ et on suppose que F possède un pôle simple a. Alors le polynôme qui apparaît au numérateur du terme $\frac{1}{X-a}$, dans la décomposition en éléments simples, est constant et cette constante vaut $\frac{P(a)}{Q'(a)}$. En d'autres termes, on peut écrire :*

$$F = G + \frac{P(a)}{Q'(a)}\frac{1}{X-a}\,,$$

où $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admet pas a comme pôle.

Proposition 11.78. — *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On écrit $P = c\prod_{k=1}^{k}(X-r_j)^{m_j}$ où les r_j sont les racines distinctes de P et c le coefficient dominant de P. Alors les pôles de $\frac{P'}{P}$ sont simples et la décomposition en éléments simples est donnée par :*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{X-r_j}\,.$$

CHAPITRE 12

SÉRIES DE NOMBRES RÉELS OU COMPLEXES

La théorie des séries est l'étude des sommes comportant une infinité dénombrable de nombres réels ou complexes. Plus précisément, étant donnée une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quel sens peut-on donner à l'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + \cdots$. Le but de ce chapitre est l'étude détaillée de ce problème.

12.1. Généralités

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Pour étudier la somme $u_0 + u_1 + \cdots$, il est naturel de former les sommes :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et d'étudier la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue.

Définition 12.1. — Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Notation 12.2. — *Une série de terme général u_n sera notée $\sum u_n$. On dira que S_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.*

Définition 12.3. — On dit qu'une série $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge vers une limite finie. Dans ce cas, la limite S de la suite (S_n) s'appelle la somme de la série $\sum u_n$ et on la note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Si la suite (S_n) ne converge pas, on dit que la série $\sum u_n$ diverge.

***Exemple 12.4* (série géométrique réelle).** — C'est par définition la série de terme général a^n où a est un nombre réel non nul donné. La suite (S_n) associée à cette série est donnée par

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \text{ si } a \neq 1 \\ (n+1) \text{ si } a = 1\,. \end{cases}$$

Par conséquent :

1) Si $a = 1$ alors $\lim S_n = +\infty$ et donc la série $\sum 1^n$ diverge.
2) Si $a = -1$ alors $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Comme la suite $((-1)^n)$ diverge, la suite (S_n) diverge et donc la série $\sum(-1)^n$ diverge.

3) Si $|a| < 1$ alors (S_n) converge vers $\frac{1}{1-a}$. Ainsi, la série $\sum a^n$ converge et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.
4) Si $|a| > 1$ alors (S_n) diverge car (a^n) diverge. Ainsi, la série $\sum a^n$ diverge.

***Exemple 12.5* (série géométrique complexe).** — C'est par définition la série de terme général a^n où a est un nombre complexe non-nul donné. Comme dans le cas réel on peut montrer que $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas sa somme est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Remarque 12.6. — Comme pour les suites, étudier la nature d'une série c'est dire si elle est convergente ou divergente.

Définition 12.7. — Si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S, le nombre

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est appelé le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.

Remarque 12.8. — Le reste R_n d'ordre n n'est défini que pour les séries convergentes, et comme dans ce cas la suite (S_n) converge vers S, on en déduit que la suite (R_n) converge vers 0.

Proposition 12.9. — *On ne change pas la nature d'une série $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de la suite (u_n).*

Démonstration. — Soit (v_n) une suite, et supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow v_n = u_n$$

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k)\,.$$

La suite $(S_n - T_n)$ est stationnaire pour $n > n_0$ et donc la suite (S_n) converge si et seulement si la suite (T_n) converge. Autrement dit, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge. □

Remarque 12.10. — On vient de montrer qu'on ne modifie pas la nature d'une série si on modifie un nombre fini de termes, mais attention, en cas de convergence sa somme peut être modifiée ! En effet, on a pour tout $n \geqslant n_0$, $S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k)$ et donc $S - T = \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k)$. Par conséquent, si $\sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k) \neq 0$ alors $S \neq T$.

Définition 12.11. — Étant données deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et un nombre réel ou complexe α, on définit :

1) la somme des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ comme la série de terme général $u_n + v_n$. On note alors
$$\left(\sum u_n\right) + \left(\sum v_n\right) = \sum (u_n + v_n)\,.$$
2) le produit de α et de la série $\sum u_n$ comme la série de terme général αu_n. On note alors
$$\alpha\left(\sum u_n\right) = \sum (\alpha u_n)\,.$$

Avec ces deux lois et les propriétés établies pour les suites numériques on en déduit aussitôt le résultat suivant :

Proposition 12.12. — *Muni des deux opérations définies ci-dessus, l'ensemble des séries réelles (resp. complexes) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$), dont l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel.*

Remarque 12.13. — La somme d'une série convergente $\sum u_n$ et d'une série divergente $\sum v_n$ est une série divergente. En effet, sinon la série $\sum v_n = \sum(u_n+v_n)-\sum u_n$ serait convergente.

En revanche, on ne peut en général rien dire sur la nature de la somme de deux séries divergentes.

Proposition 12.14. — *Si une série $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$.*

Démonstration. — Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Or les suites (S_n) et (S_{n-1}) convergent toutes les deux vers la somme S de la série $\sum u_n$. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 0. $\square$

La Proposition 12.14 peut être quelques fois utilisée sous sa forme contraposée pour montrer qu'une série diverge.

Corollaire 12.15. — *Si une suite (u_n) ne converge pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ est divergente.*

Remarque 12.16. — **La condition $u_n \to 0$ est nécessaire pour la convergence de la série $\sum u_n$ mais n'est pas suffisante !** Par exemple, considérons la série de terme général $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ où $n \geqslant 1$. Il est clair que $\lim u_n = 0$. Pourtant, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{1+k}{k}) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$$

et donc $\lim S_n = +\infty$. Ainsi, la série diverge mais son terme général tend vers 0.

Définition 12.17. — On dit qu'une série $\sum u_n$ diverge grossièrement si la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

Exemple 12.18. — La série de terme général $u_n = 1 + \frac{\sin n}{n}$ où $n \geqslant 1$ diverge grossièrement car $\lim u_n = 1$.

Voici des séries pour lesquelles on arrive à simplifier les somme partielles.

Définition 12.19. — On appelle série téléscopique associée à une suite (a_n), une série $\sum u_n$ où $u_n = a_n - a_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

Proposition 12.20. — *Soit $\sum u_n$une série téléscopique associée à une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$. Alors la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature, et en cas de convergence, on a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -a_0 + \lim a_n$$

Démonstration. — Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0\,.$$

On en déduit que (S_n) converge si et seulement si (a_n) converge. En cas de convergence, on obtient donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -a_0 + \lim a_n\,.$$

$\square$

Exemple 12.21. — Considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ où $n \geqslant 1$. On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et donc $\sum u_n$ est téléscopique associée à $(a_n)_{n\geqslant 0}$ où $a_n = -\frac{1}{n+1}$. Comme la suite (a_n) converge vers 0, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge et a pour somme $-a_0 = 1$.

Voici un critère de convergence qui découle du fait que dans $\mathbb{C}$ les suites de Cauchy sont convergentes.

***Théorème 12.22* (Critère de Cauchy).** — *Une série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Démonstration. — Soit S_n la somme partielle d'ordre n associée à la série $\sum u_n$. On sait que la suite (S_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy donc si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant N \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \varepsilon\,.$$

□

***Exemple 12.23* (série harmonique).** — C'est par définition la série de terme général $\frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$

Le critère de Cauchy n'étant pas vérifié (prendre $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et $p = 2n$), on conclut que la série harmonique est divergente.

Définition 12.24. — Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum \mid u_n \mid$ est convergente.

Le résultat suivant est très important en pratique.

Théorème 12.25. — *Si une série est absolument convergente alors elle est convergente.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\sum |u_n|$ converge, elle vérifie donc le critère de Cauchy et donc

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \mid u_k \mid \leqslant \varepsilon\,.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leqslant \varepsilon\,.$$

On en déduit que la série $\sum u_n$ satisfait le critère de Cauchy et est donc convergente.

□

Remarque 12.26. — La réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'une série peut être convergente sans être absolument convergente.

Considérons par exemple la série de terme général u_n avec $u_{2p} = -\frac{1}{p}$ et $u_{2p-1} = \frac{1}{p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k = 0\,, \quad S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k = u_{2n+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$

Les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent et ont même limite 0. On sait alors que la suite (S_n) converge vers 0. La série $\sum u_n$ est donc convergente et de somme nulle. Cependant cette série n'est pas absolument convergente car

$$\sum_{k=1}^{2n} |u_k| = 2(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$$

et donc $\sum |u_n| = 2(\sum \frac{1}{n})$ et on a vu que la série harmonique est divergente.

Définition 12.27. — Un série numérique qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.

Nous reviendrons plus tard sur ce type de séries.

12.2. Séries à termes positifs

Dans cette section, on s'intéresse aux séries à termes réels positifs. En fait, ce qui compte vraiment ici c'est que le signe soit constant. Tous les résultats que nous obtiendrons pour les séries à termes positifs resteront vrais pour les séries à termes négatifs, il suffit d'adapter les énoncés et les démonstrations en remplaçant "croissante" par "décroissante", "majorée" par "minorée", etc.

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante, et donc :

Lemme 12.28. — *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée. De plus, si la série diverge alors $\lim S_n = +\infty$.*

Démonstration. — Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ et donc la suite (S_n) est croissante. On sait alors que (S_n) converge si elle est majorée, et tend vers $+\infty$ dans le cas contraire. □

Nous allons maintenant énoncer les principaux critères de convergence pour les séries à termes positifs.

Théorème 12.29 **(Comparaison).** — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors,*

1) *si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$ et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\,, \tag{12.2.1}$$

2) *si la série $\sum u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum v_n$.*

Démonstration. — 1) Notons (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles associées respectivement aux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Par hypothèse, on a $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$, donc

$$\forall n \geqslant 0\,, \quad S_n \leqslant T_n \tag{12.2.2}$$

Comme $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites (S_n) et (T_n) sont croissantes. Comme la série $\sum v_n$ est convergente, la suite (T_n) est convergente donc majorée par la somme T de la série $\sum v_n$. On en déduit que la suite (S_n) est majorée (d'après (12.2.2)). Comme (S_n) est majorée et croissante elle converge et donc la série $\sum u_n$ est convergente. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n \leqslant T_n \leqslant T = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

et comme (S_n) est convergente, sa limite est inférieure à T.

2) C'est la contraposée de l'assertion 1). □

Exemple 12.30. — Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} .$$

Or, on a vu que la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ est convergente (elle est téléscopique), donc d'après le théorème de comparaison la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ $(n \geqslant 1)$ est convergente.

Exemple 12.31. — Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or on sait que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, donc le théorème de comparaison montre que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Remarque 12.32. — Si la majoration $u_n \leqslant v_n$ dans le théorème précédent n'est vérifiée qu'a partir d'un certain rang n_0, la conclusion du théorème sur la nature de la série reste valable car la convergence des suites $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(T_n)_{n\geqslant n_0}$ entraine celle de $(S_n)_{n\geqslant 0}$ et $(T_n)_{n\geqslant 0}$. Cependant l'inégalité (12.2.1) peut être fausse. Par exemple, on considère, $u_n = \frac{1}{3^n}$ pour $n \geqslant 0$, $v_0 = 0$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$ pour $n \geqslant 1$. On a évidemment $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 1$. D'après ce que l'on a vu sur les séries géométriques, on sait que ces deux séries sont convergentes et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} ,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 ,$$

et par conséquent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n > \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

Le théorème de comparaison permet d'établir un autre critère important.

Théorème 12.33 **(Équivalence).** — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$. Alors :*

1) Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2) En cas de convergence, les restes sont équivalents.

3) En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Démonstration. — Observons d'abord que l'équivalence $u_n \sim v_n$ peut s'écrire

(12.2.3) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow (1-\varepsilon)v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)v_n\,.$$

1) Il suffit d'appliquer le théorème de comparaison. En effet, si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de la série $(1+\varepsilon)\sum v_n$ et donc de $\sum u_n$. Si $\sum v_n$ diverge, il en est de même de $(1-\varepsilon)\sum v_n$ et donc de $\sum u_n$.

2) On sait déjà qu'en cas de convergence de la série alors la suite des restes converge vers 0. Avec (12.2.3) on en déduit que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow (1-\varepsilon)\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p\,,$$

ce qui établit l'équivalence des restes.

3) Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent et notons (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles associées. Pour tout $n > n_0$ (le n_0 de (12.2.3)), on a

$$S_n = S_{n_0} + \sum_{n_0+1}^{n} u_p\,, \quad T_n = T_{n_0} + \sum_{n_0+1}^{n} v_p\,.$$

En utilisant l'encadrement (12.2.3), on obtient

$$(1-\varepsilon)\sum_{n_0+1}^{n} v_p \leqslant \sum_{n_0+1}^{n} u_p \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{n_0+1}^{n} v_p$$

ce qui s'écrit aussi

$$(1-\varepsilon)(T_n - T_{n_0}) \leqslant S_n - S_{n_0} \leqslant 1+\varepsilon)(T_n - T_{n_0})$$

ou encore

$$(1-\varepsilon-\frac{(1-\varepsilon)T_{n_0}-S_{n_0}}{T_n})T_n \leqslant S_n \leqslant (1+\varepsilon-\frac{(1+\varepsilon)T_{n_0}-S_{n_0}}{T_n})T_n\,.$$

Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes et à termes positifs, les suites (S_n) et (T_n) tendent vers $+\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-\varepsilon)T_{n_0}-S_{n_0}}{T_n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\varepsilon)T_{n_0}-S_{n_0}}{T_n} = 0$. On peut donc trouver n_1 et n_2 dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow -\varepsilon \leqslant \frac{(1-\varepsilon)T_{n_0}-S_{n_0}}{T_n} \leqslant \varepsilon$$

et

$$n \geqslant n_2 \Rightarrow -\varepsilon \leqslant \frac{(1+\varepsilon)T_{n_0}-S_{n_0}}{T_n} \leqslant \varepsilon$$

En posant $N = \max(n_0+1, n_1, n_2)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow (1-2\varepsilon)T_n \leqslant S_n \leqslant (1+2\varepsilon)T_n$$

ce qui montre que

$$S_n \sim T_n\,.$$

□

Remarque 12.34. — Le critère d'équivalence peut être mis en défaut si les séries ne sont pas à termes de signe constant.

Le résultat suivant traite des séries qui serviront de référence (avec les séries géométriques) pour appliquer les théorèmes de comparaison et d'équivalence.

Théorème 12.35. — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. — La série de Riemann est à termes positifs.

On sait déjà que pour $\alpha = 1$ cette série est la série harmonique qui est divergente. Pour $\alpha < 1$, on a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ et donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente par le théorème de comparaison.

On sait aussi que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Si $\alpha \geqslant 2$ alors $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^2}$, le théorème de comparaison montre que dans ce cas $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Il reste à traiter le cas où $\alpha \in]1, 2[$. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}},\ (n \geqslant 1) \tag{12.2.4}$$

On a par téléscopage

$$\sum_{p=1}^{n} u_p = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\,.$$

Comme $\alpha - 1 > 0$, on en déduit que $\sum u_n$ converge et a pour somme 1. Or d'après 12.2.4 on a pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - (\frac{n+1}{n})^{1-\alpha} \right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} (1 - (1 + \frac{1}{n})^{1-\alpha})$$

et donc

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - (1 + \frac{1-\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})) \right)$$

d'où

$$u_n = \frac{\alpha - 1}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha}) = \frac{\alpha-1}{n^\alpha}(1 + o(1))\,.$$

On en déduit que

$$u_n \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}\,.$$

Les deux séries étant à termes positifs, le théorème d'équivalence permet de conclure que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha \in]1, 2[$. □

Exemple 12.36. — On considère la série de terme général $\frac{n-1}{n^{3/2}+1}$. C'est une série à termes positifs. Comme $\frac{n-1}{n^{3/2}+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ (à faire) et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, le théorème d'équivalence nous dit que $\sum \frac{n-1}{n^{3/2}+1}$ diverge.

Exemple 12.37. — On considère la série de terme général $\frac{\sin n}{n^2+1}$. Ce n'est pas une série à termes de signe constant donc on considère la série des valeurs absolues. On a $0 \leqslant \mid \frac{\sin n}{n^2+1} \mid \leqslant \frac{1}{n^2}$ et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente alors le théorème de comparaison nous dit que $\sum \frac{\sin n}{n^2+1}$ est absolument convergente donc convergente.

***Corollaire 12.38* (règle des $n^\alpha u_n$).** — *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

1) *Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers 0 et si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.*

2) *Si la suite $(n^\alpha u_n)$ tend vers $+\infty$ et si $\alpha \leqslant 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. — 1) Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers 0 alors $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$ on a $u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$. Si $\alpha > 1$ alors la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente et donc par le théorème de comparaison la série $\sum u_n$ converge aussi.

2) Si la suite $(n^\alpha u_n)$ tend vers $+\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$ on a $n^\alpha u_n \geqslant 1$ et donc $u_n \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$. Si $\alpha \leqslant 1$ alors la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente et donc par le théorème de comparaison la série $\sum u_n$ diverge aussi. □

Exemple 12.39. — On considère la série de terme général $\frac{e^{-n^2}}{n+1}$ qui est à termes positifs. On a $n^2\frac{e^{-n^2}}{n+1} \to 0$ donc par la règle des $n^\alpha u_n$, la série $\sum \frac{e^{-n^2}}{n+1}$ est convergente.

Exemple 12.40. — On considère la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$, pour $n \geqslant 1$, qui est à termes positifs. On a $n\frac{\ln n}{n} \to +\infty$ et donc par la règle des $n^\alpha u_n$, la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ est divergente.

***Proposition 12.41* (Règle de domination).** — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ quand $n \to +\infty$.*

1) *Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum u_n$. Dans ce cas, les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ vérifient $R_n = O(R'_n)$ quand $n \to +\infty$.*
2) *Si la série $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.*

Démonstration. — L'hypothèse $u_n = O(v_n)$ nous dit que

$$\exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant M v_n$$

L'implication $n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{M} \leqslant v_n$ et le théorème de comparaison donnent 2).

L'implication $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant M v_n$ et le théorème de comparaison montrent que $\sum u_n$ converge quand $\sum v_n$ converge. Dans ce cas, on obtient aussi pour $n \geqslant n_0$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant M(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k) = MR'_n$$

et donc $R_n = O(R'_n)$. □

***Proposition 12.42* (Règle de négligeabilité).** — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$ quand $n \to +\infty$.*

1) *Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum u_n$. Dans ce cas, les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ vérifient $R_n = o(R'_n)$ quand $n \to +\infty$.*
2) *Si la série $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.*

Démonstration. — Comme $u_n = o(v_n)$ implique $u_n = O(v_n)$ on obtient 2) et la première partie de 1) en appliquant la règle de domination. On suppose que $\sum v_n$ et donc aussi $\sum u_n$ convergent. Comme $u_n = o(v_n)$ on a

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant \varepsilon v_n$$

et donc pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \varepsilon(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k) = \varepsilon R'_n$$

et donc $R_n = o(R'_n)$. □

On définit les intégrales généralisées qu'on étudiera plus précisément dans le prochain chapitre.

Définition 12.43. — Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)\,dt$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)dt$. Sinon, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge. La nature de l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente ou divergente.

Exemple 12.44. — Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge vers 1. En effet, $\int_1^A \frac{1}{t^2}\,dt = [-\frac{1}{t}]_1^A = -\frac{1}{A} + 1 \to 1$ quand $A \to +\infty$.

Par contre, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente. En effet, $\int_1^A \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^A = \ln A \to +\infty$ quand $A \to +\infty$.

***Théorème 12.45* (comparaison série-intégrale).** — *Soient a un réel donné et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ (avec $n \geqslant a$) et l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

Démonstration. — Quitte à considérer la fonction $f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t+a)$, on peut considérer dans notre énoncé que $a = 0$. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ on a alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [p, p+1], \quad f(p+1) \leqslant f(t) \leqslant f(p)\,.$$

En intégrant on obtient

$$\int_p^{p+1} f(p+1)\,dt \leqslant \int_p^{p+1} f(t)\,dt \leqslant \int_p^{p+1} f(p)\,dt$$

et donc

$$f(p+1) \leqslant \int_p^{p+1} f(t)\,dt \leqslant f(p)\,.$$

On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{n} f(p+1) \leqslant \sum_{p=0}^{n} \int_p^{p+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{p=0}^{n} f(p)$$

et donc

$$S_{n+1} - f(0) \leqslant \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant S_n\,. \tag{12.2.5}$$

Si la série $\sum f(n)$ converge alors la suite (S_n) est majorée et la suite $(\int_0^{n+1} f(t)\,dt)$ aussi par conséquent. La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est croissante et donc la suite $(\int_0^{n+1} f(t)\,dt)$ est croissante majorée et donc convergente vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Il est évident que la suite $(\int_0^n f(t)\,dt)$ converge aussi vers ℓ. Si $A \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_0^{E(A)} f(t)\,dt \leqslant \int_0^A f(t)\,dt \leqslant \int_0^{E(A)+1} f(t)\,dt\,,$$

où $E(A)$ désigne la partie entière de A. Par le théorème des gendarmes on en déduit que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge vers ℓ.

Réciproquement, si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut $\ell \in \mathbb{R}$ alors à partir de (12.2.5) on obtient

$$S_{n+1} \leqslant f(0) + \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(0) + \ell\,.$$

La suite des sommes partielles (S_n) est donc majorée et croissante (car la série est à termes positifs), elle est donc convergente et donc la série $\sum f(n)$ converge.

En cas de convergence, on a vu que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$f(p+1) \leqslant \int_p^{p+1} f(t)\,dt \leqslant f(p)$$

et donc, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{p=n}^{n+m} f(p+1) \leqslant \sum_{p=n}^{n+m} \int_p^{p+1} f(t)\,dt = \int_n^{n+m+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{p=n}^{n+m} f(p)\,.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant R_{n-1}\,,$$

ce qui démontre l'inégalité du théorème. □

***Exemple 12.46* (Séries de Bertrand).** — La série de Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

converge si et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

En effet, pour $\alpha < 0$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta \leqslant 0$) la série diverge grossièrement. Supposons maintenant $\alpha > 0$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta > 0$). Dans ces cas, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. Notre série est donc de même nature que l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ qu'on verra en exercice.

Exemple 12.47. — La série $\sum \frac{n+\sin n}{n^3 \ln n + 2}$ est convergente.

En effet, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\frac{n+\sin n}{n^3 \ln n+2} \geqslant 0$ et $\frac{n+\sin n}{n^3 \ln n+2} \sim \frac{n}{n^3 \ln n} = \frac{1}{n^2 \ln n}$. Or $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$ est une série de Bertrand convergente. On conclut par le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs. On peut aussi conclure sans invoquer le résultat sur les séries de Bertrand. En effet pour $n \geqslant 3$, $0 \leqslant \frac{1}{n^2 \ln n} \leqslant \frac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et d'après le théorème de comparaison la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$ est convergente. Par le théorème d'équivalence, la série $\sum \frac{n+\sin n}{n^3 \ln n+2}$ est convergente.

12.3. Règle de D'Alembert et règle de Cauchy

***Théorème 12.48* (règle de D'Alembert).** — *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs (et même > 0 pour n assez grand) telle que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ *ou* $\ell \in [0, +\infty]$.

1) *Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.*

2) *Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

3) *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure a priori.*

Démonstration. — 1) Supposons donc que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ ou $\ell \in [0, 1[$. Cela veut dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$ on ait

$$0 < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{1+\ell}{2}\,.$$

On pose $q = \frac{1+\ell}{2}$, on a $0 < q < 1$. De plus, pour tout $n \geqslant p$, on a

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q\,.$$

Comme $u_n > 0$, cela donne $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant qu_n$ pour tout $n \geqslant p$. On en déduit alors, pour tout $n \geqslant p$:

$$0 < u_{n+1} \leqslant qu_n \leqslant q^2 u_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant q^{n+1-p} u_p = \frac{u_p}{q^p} q^{n+1} .$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant p+1$, on a

$$0 < u_n \leqslant Mq^n ,$$

où $M = \frac{u_p}{q^p}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge car $q \in]0,1[$. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs montre que la série $\sum u_n$ converge.

2) Supposons donc que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ ou $\ell > 1$. Posons $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$ on ait

$$0 < \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{1+\ell}{2} .$$

On pose $q = \frac{1+\ell}{2}$, on a $q > 1$. De plus, pour tout $n \geqslant p$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q .$$

Comme $u_n > 0$, cela donne $u_{n+1} \geqslant qu_n$ pour tout $n \geqslant p$. On en déduit alors, pour tout $n \geqslant p$,

$$u_{n+1} \geqslant qu_n \geqslant q^2 u_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant q^{n+1-p} u_p = \frac{u_p}{q^p} q^{n+1} .$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant p+1$, on a

$$u_n \geqslant Mq^n$$

où $M = \frac{u_p}{q^p} > 0$. Comme $q > 1$, $\lim u_n = +\infty$ ce qui montre que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

3) On ne peut rien dire en général lorsque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Par exemple, les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ vérifient toutes les deux $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ mais sont de natures différentes. □

Exemple 12.49. — Etudions la nature de la série $\sum \frac{n^n}{n!}$.

Posons $u_n = \frac{n^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(0! = 1)$. On a $u_n \geqslant 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n+1} (\frac{n+1}{n})^n (n+1) = (1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$= e^{n(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{1+o(1)} \to e$$

Comme $e > 1$, la règle de D'Alembert montre que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple 12.50. — Etudions la nature de la série $\sum \frac{n^5}{2^n}$.

Posons $u_n = \frac{n^5}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \geqslant 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^5} = \frac{1}{2} (\frac{n+1}{n})^5 \to \frac{1}{2} < 1$$

La règle de D'Alembert montre que $\sum u_n$ est convergente.

***Théorème 12.51* (règle de Cauchy).** — *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$ ou $\ell \in [0, +\infty]$.*

1) *Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.*

2) *Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

3) *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure a priori.*

Démonstration. — 1) Supposons donc que $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$ ou $\ell \in [0,1[$. Cela veut dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \left|(u_n)^{\frac{1}{n}} - \ell\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$ on ait

$$0 \leqslant \left|(u_n)^{\frac{1}{n}} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$0 \leqslant (u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{1+\ell}{2}\,.$$

On pose $q = \frac{1+\ell}{2}$, on a $0 < q < 1$. De plus, pour tout $n \geqslant p$, on a

$$0 \leqslant (u_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant q$$

et donc

$$0 \leqslant u_n \leqslant q^n\,.$$

La série géométrique $\sum q^n$ converge car $q \in]0,1[$. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs montre que la série $\sum u_n$ converge.

2) Supposons donc que $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$ avec $\ell > 1$. Posons $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$ on ait

$$0 <\mid (u_n)^{\frac{1}{n}} - \ell \mid\leqslant \varepsilon$$

et donc

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{1+\ell}{2}$$

On pose $q = \frac{1+\ell}{2}$, on a $q > 1$. De plus, pour tout $n \geqslant p$, on a

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant q$$

et donc

$$u_n \geqslant q^n\,.$$

Comme $q > 1$, $\lim u_n = +\infty$ ce qui montre que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

3) On ne peut rien dire en général lorsque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Par exemple, les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ vérifient toutes les deux $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = 1$ mais sont de natures différentes. □

Exemple 12.52. — Etudions la nature de la série $\sum(\frac{2n+1}{3n+5})^n$.

Posons $u_n = (\frac{2n+1}{3n+5})^n$ pour $n \geqslant 0$. On a $u_n \geqslant 0$ et $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{2n+1}{3n+5} \to \frac{2}{3} < 1$. La règle de Cauchy montre que $\sum u_n$ converge.

Exemple 12.53. — Etudions la nature de la série $\sum(\frac{n+1}{n})^{n^2}$.

Posons $u_n = (\frac{n+1}{n})^{n^2}$ pour $n > 0$. On a $u_n \geqslant 0$ et

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = (1 + \frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{1+o(1)} \to e\,.$$

Comme $e > 1$, la règle de D'Alembert montre que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

12.4. Séries semi-convergentes et séries alternées

Définition 12.54. — On dit qu'une série est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 12.55. — On verra que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est absolument convergente. On sait déjà qu'elle n'est pas absolument convergente.

Définition 12.56. — On appelle série alternée toute série de terme général $(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite de nombres réels de signe constant.

Exemple 12.57. — La série géométrique $\sum(-2)^n$ est géométrique car $(-2)^n = (-1)^n 2^n$.

À un signe près, une série alternée s'écrit donc $\sum(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite de nombres réels positifs. Pour de telles séries, on a le résultat remarquable suivant.

Théorème 12.58 **(critère spécial des séries alternées)**
Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternées $\sum(-1)^n a_n$ est convergente. De plus, sa somme S vérifie

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

pour tout $n \geqslant 0$, et son reste R_n d'ordre n vérifie

$$|R_n| \leqslant a_{n+1}\,.$$

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la suite des sommes partielles (S_n) converge. Pour cela, il suffit de montrer que les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes et ont même limite. On va montrer que (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes. En effet, comme (a_n) est décroissante, on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$$

ce qui montre que (S_{2n}) est décroissante, et

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0$$

ce qui montre que (S_{2n+1}) est croissante. De plus, $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$ (car (a_{2n}) est une sous-suite de (a_n) qui converge vers 0). Par le théorème des suites adjacentes, on en déduit que $\sum(-1)^n a_n$ est convergente. De plus, sa somme S vérifie

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

pour tout $n \geqslant 0$. Enfin, on en déduit que

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$$

et

$$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}\,.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid R_n \mid \leqslant a_{n+1}\,.$$

□

Exemple 12.59. — Montrons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.

Cette série se présente sous la forme $\sum(-1)^n a_n$ où $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une suite à termes positifs. On a donc affaire à une série alternée. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\alpha < 1$$

et donc (a_n) est décroissante. Comme $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$, le critère spécial des séries alternées permet de conclure que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$ fixé. Ceci montre que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

Le prochain théorème est une profonde généralisation du critère spécial des séries alternées. Avant cela, on a besoin d'un lemme.

Lemme 12.60. — *Soit M un nombre réel strictement positif. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels tels que*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0 .$$

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres complexes tels que pour tout $p = 1, 2, \ldots, n$, on ait

$$|b_1 + \cdots + b_p| \leqslant M .$$

Alors,

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leqslant M a_1 .$$

Démonstration. — Posons

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = b_1\\
&\sigma_2 = b_1 + b_2\\
&\cdots\cdots\\
&\sigma_p = b_1 + b_2 + \cdots + b_p\\
&\sigma_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n .
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&b_1 = \sigma_1\\
&b_2 = \sigma_2 - \sigma_1\\
&\cdots\cdots\\
&b_p = \sigma_p - \sigma_{p-1}\\
&b_n = \sigma_n - \sigma_{n-1} .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n|\\
&\qquad = |a_1 \sigma_1 + a_2(\sigma_2 - \sigma_1) + \cdots + a_{n-1}(\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}) + a_n(\sigma_n - \sigma_{n-1})| ,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n|\\
&\qquad |\sigma_1(a_1 - a_2) + \sigma_2(a_2 - a_3) + \cdots + \sigma_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + \sigma_n a_n| .
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n|\\
&\qquad \leqslant |\sigma_1|(a_1 - a_2) + |\sigma_2|(a_2 - a_3) + \cdots + |\sigma_{n-1}|(a_{n-1} - a_n) + |\sigma_n| a_n \leqslant M a_1 .
\end{aligned}$$

□

***Théorème 12.61* (critère d'Abel).** — *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes telle que $u_n = a_n b_n$ pour tout n. On suppose que*

1) *les a_n sont réels strictement positifs, et la suite (a_n) est décroissante et tend vers 0.*

2) *les b_n sont réels ou complexes, et il existe une constante $M > 0$ telle que, quels que soient $n \geqslant 0$ et $m \geqslant n$, on ait*

$$|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| \leqslant M .$$

Alors la série $\sum u_n$ *converge, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant M a_{n+1}\,.$$

Démonstration. — On sait que pour une série numérique la convergence équivaut au critère de Cauchy. Montrons donc que sous les hypothèses du théorème, la série de terme général $u_n = a_n b_n$ vérifie le critère de Cauchy. Donnons nous donc $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (a_n) tend vers 0, il existe un entier N tel que $n \geqslant N$ implique $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$. Alors, quels que soient $m \geqslant n \geqslant N$ on a d'après le lemme précédent

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| = |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_m b_m| \leqslant M a_{n+1} \leqslant \varepsilon\,.$$

□

Remarque 12.62. — En prenant $b_n = (-1)^n$ et $M = 1$ dans le théorème précédent, on retrouve le critère spécial des séries alternées.

Exemple 12.63. — Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante et tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors, pour tout $\theta \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, les séries $\sum a_n \cos(n\theta)$ et $\sum a_n \sin(n\theta)$ sont convergentes. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\theta)$ et $T_n = \sum_{k=0}^n a_k \sin(k\theta)$. On sait que les suites (S_n) et (T_n) convergent si et seulement si la suite $(S_n + \imath T_n)$ converge. Or

$$S_n + \imath T_n = \sum_{k=0}^n a_k(\cos(k\theta) + \imath \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n a_k e^{\imath k\theta}\,.$$

Les séries $\sum a_n \cos(n\theta)$ et $\sum a_n \sin(n\theta)$ convergent si et seulement si la série $\sum a_n e^{\imath n\theta}$ converge.

Appliquons donc le critère d'Abel à $\sum a_n e^{\imath n\theta}$. On sait que (a_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Il reste à vérifier la condition 2) du critère d'Abel. On a

$$\left|1 + e^{\imath\theta} + e^{2\imath\theta} + \cdots + e^{\imath n\theta}\right| = \left|\frac{1 - e^{\imath(n+1)\theta}}{1 - e^{\imath\theta}}\right|$$

et donc

$$\left|1 + e^{\imath\theta} + e^{2\imath\theta} + \cdots + e^{\imath n\theta}\right| = \left|\frac{1 - e^{\imath(n+1)\theta}}{e^{\imath\frac{\theta}{2}}(e^{-\imath\frac{\theta}{2}} - e^{\imath\frac{\theta}{2}})}\right| = \left|\frac{1 - e^{\imath(n+1)\theta}}{2\sin(\frac{\theta}{2})}\right| \leqslant \frac{2}{2\left|\sin(\frac{\theta}{2})\right|}\,.$$

Ainsi,

$$\left|1 + e^{\imath\theta} + e^{2\imath\theta} + \cdots + e^{\imath n\theta}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin(\frac{\theta}{2})\right|}\,.$$

En prenant $M = \frac{1}{\left|\sin(\frac{\theta}{2})\right|}$ (indépendant de n) dans le critère d'Abel, on peut maintenant conclure que la série $\sum a_n e^{\imath n\theta}$ converge, donc les séries $\sum a_n \cos(n\theta)$ et $\sum a_n \sin(n\theta)$ sont convergentes.

12.5. Exercices

Exercice 205

Pour chacune des séries, indiquer la nature et en cas de convergence calculer la somme :

$$\sum \frac{1}{7^n}\,,\quad \sum \frac{2^n}{5^{n+2}}\,,\quad \sum \frac{4^n}{3^{n-1}}\,,\quad \sum e^{-n-1}.$$

Exercice 206

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$.

1) Vérifier que $u_n = \dfrac{-1/2}{n} + \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{3/2}{n+2}$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{3}{2(n+2)}$.

3) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 207

Établir la divergence des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = n!\ ,\ v_n = (-1)^n\ ,\ w_n = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ ,\ z_n = 1 - \frac{\sin n}{n}.$$

Exercice 208

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

Exercice 209

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 210

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1-\sin n}{1+n\sqrt{n}},\quad v_n = \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}\ (n \geqslant 1),\quad w_n = e^{-\sqrt{2+n}},\quad z_n = 1-\cos\frac{1}{n}\ (n \geqslant 1).$$

Exercice 211

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{n^2+\sin n^5},\quad v_n = \frac{e^{-2n}+\sqrt{n}}{n^2+1}\ ,\quad w_n = \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n.$$

Exercice 212

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n\ ,\ v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\ ,\ w_n = \left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)^{n^2} - 1.$$

Exercice 213

On considère la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}\ ,\ \ n \geqslant 1.$$

1) Vérifier que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$.

3) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 214

Étudier les séries de termes généraux :

$$u_n = (-1)^n \arcsin\left(\frac{n+1}{n^2+3}\right), \quad v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 215

On considère les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

1) Montrer que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$.

2) Montrer que $\sum u_n$ diverge et que $\sum v_n$ converge.

3) Conclusion ?

Exercice 216

On considère une suite (u_n) à termes dans $\mathbb{R}_+$, bornée, et telle que la série $\sum u_n$ soit divergente.

1) Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ est divergente.

2) Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{u_n\, e^{in}}{1+u_n\, e^{in}}$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 217

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{2n^3-n}{n^4+n+2}\,, \sum n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum \frac{1+\cos n}{2n^3+1}\,, \quad \sum \frac{1}{e^n}.$$

Exercice 218

1) Montrer que la série $\sum \frac{1}{4^n}$ est convergente puis calculer sa somme.

2) Même question avec la série $\sum \frac{1+3^n}{4^n}$.

Exercice 219

1) Établir la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

2) Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n^2+1}$?

3) Quelle est la nature de la série de terme général $w_n = \dfrac{(-1)^n+\sqrt{n}+n}{n^2+1}$?

CHAPITRE 13

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

On veut étudier le cas où f est continue sur un intervalle $[a, b[$ (ou bien $]a, b]$) sans être continue sur $[a, b]$, et essayer de donner un sens à la quantité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Par exemple, quel sens peut-on donner à $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ ou encore à $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$?

Remarque 13.1. — 1) Si a et b sont des réels. Le fait que f soit continue sur $[a, b[$ sans être continue sur $[a, b]$ signifie que $f(x)$ n'a pas de limite finie lorsque x tend vers b. Elle peut soit tendre vers $\pm\infty$ (c'est le cas le plus fréquent que nous rencontrerons) ou bien ne pas avoir de limite du tout.

2) Si a ou b est infini alors l'intégrale est forcément généralisée.

13.1. Intégrales généralisées sur un intervalle borné

Définition 13.2. — 1) Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où a et b sont des réels avec $a < b$. Si

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe et est finie, alors on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de f sur $[a, b[$ est convergente ou converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de f sur $[a, b[$ est divergente ou diverge.

2) Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ où a et b sont des réels avec $a < b$. Si

$$\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe et est finie, alors on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de f sur $]a, b]$ est convergente ou converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de f sur $]a, b]$ est divergente ou diverge.

En cas de convergence dans 1) et 2), on note aussi $\int_a^b f(x)\,dx$ la limite. La nature de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente ou divergente.

Exemple 13.3. — Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$?

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, 1]$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est bien généralisée en 0 (avec un problème en 0). Soit $t > 0$ et calculons $\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$. On a $\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2 - 2\sqrt{t}$ et $\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2$. Donc l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente et on a $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2$.

Exemple 13.4. — Étudier la nature de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ est continue sur $[0,1[$ et on a $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ est bien généralisée en 1. Calculons $\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ pour $0 < t < 1$. On a $\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = [\frac{-1}{(x-1)}]_0^t = \frac{-1}{(t-1)} - 1 \to_{t\to 1^-} +\infty$ Ainsi, l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ est divergente.

Exemple 13.5. — Étudier la nature de $\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,1]$ et on a $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x$ est généralisée en 0. Calculons $\int_t^1 \ln x \, dx$ pour $0 < t < 1$. En intégrant par parties avec $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$, on a alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. D'où

$$\int_t^1 \ln x \,\mathrm{d}x = [x \ln x]_t^1 - \int_t^1 1 \, dx = -t\ln t - [x]_t^1 = -t\ln t - 1 + t \to_{t\to 0^+} -1\,.$$

On en conclut que $\int_0^1 \ln x \, dx$ est convergente et que $\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = -1$.

13.2. Intégrales généralisées sur la demi-droite $[a, +\infty[$

Définition 13.6. — Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x) \,\mathrm{d}x$$

existe et est finie, alors on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ de f sur $[a, +\infty[$ est convergente ou converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ de f sur $[a, +\infty[$ est divergente ou diverge. En cas de convergence, on note aussi $\int_a^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ la limite.

Remarque 13.7. — Si $\int_a^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ converge et si $b > a$ alors $\int_b^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ converge mais elles n'ont pas forcément la même valeur.

Exemple 13.8. — Étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ est généralisée en $+\infty$. Calculons $\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ pour $t > 0$. On a

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan t]_0^t \to_{t\to+\infty} \frac{\pi}{2}\,.$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ est convergente et on a $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exemple 13.9. — Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{x+1}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ est généralisée en $+\infty$. Calculons $\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ pour $t > 1$. On a

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = [\ln|x+1|]_1^t = \ln(t+1) - \ln 2 \to_{t\to+\infty} +\infty\,.$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ est divergente.

Remarque 13.10. — Dans les exemples traités précédemment, on a réussi à déterminer la nature de l'intégrale généralisée en calculant une intégrale à un moment donné. En général, calculer une intégrale explicitement c'est résoudre une équation différentielle et c'est donc difficile voir impossible. Il sera donc impossible en général de déterminer la nature d'une intégrale généralisée de cette manière.

13.3. Les exemples fondamentaux : les intégrales de Riemann

Proposition 13.11. — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1) *L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.*

2) *L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. — 1) Pour $\alpha = 1$, on a, pour tout $t > 0$:

$$\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_t^1 = -\ln t \underset{t \to 0^+}{\to} +\infty$$

et donc $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ est divergente.

Supposons donc maintenant que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour $t > 0$, on a

$$\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \int_t^1 x^{-\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^1 .$$

Ainsi,

$$\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}} \underset{t \to 0^+}{\to} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

et on obtient 1).

2) Pour $\alpha = 1$, on a, pour tout $t > 1$,

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_1^t = \ln t \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$$

et donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est divergente.

Supposons donc maintenant que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour $t > 1$, on a

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \int_1^t x^{-\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^t$$

et donc

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \int_1^t x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \underset{t \to +\infty}{\to} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ si } \alpha > 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 1 \end{cases}$$

et on obtient 2). □

Remarque 13.12. — La conclusion de la proposition précédente reste la même si dans 1) et 2) on remplace la borne 1 par un nombre réel strictement positif.

De la même manière, on obtient :

Proposition 13.13. — *Soient $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.*

1) *L'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.*

2) *L'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.*

Exemple 13.14. — Les intégrales généralisées $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ et $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$ sont convergentes ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Les intégrales généralisées $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ et $\int_1^4 \frac{dx}{x-1}$ sont divergentes.

13.4. Intégrales généralisées aux deux bornes

Si f est continue sur un intervalle ouvert $]a,b[$ (avec la convention dans toute cette section que a peut être égal à $-\infty$ et que b peut être égal à $+\infty$), l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ peut présenter un problème aux deux bornes.

Exemple 13.15. — Les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^4+x+1}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 \ln(\frac{1-x}{x})\,\mathrm{d}x$ présentent des problèmes aux deux bornes.

Définition 13.16. — Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a,b[$ (a peut être égal à $-\infty$ et b peut être égal à $+\infty$), On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de f sur $]a,b[$ est convergente ou converge si pour $c \in]a,b[$ les intégrales généralisées $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sont toutes les deux convergentes (cela ne dépend pas de c). Dans ce cas on dit aussi que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vaut $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (cela ne dépend pas de c). Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de f sur $]a,b[$ est divergente ou diverge.

Remarque 13.17. — L'étude de la nature d'une intégrale généralisée aux deux bornes se ramène donc à l'étude de deux intégrales généralisées à une seule borne. Si une des deux intégrales est divergente alors l'intégrale généralisée aux deux bornes est divergente.

Exemple 13.18. — L'intégrale généralisée aux deux bornes $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ est divergente car par Riemann $\int_1^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ est divergente. Cependant, on a l'impression que l'aire signée sous le graphe de $x \mapsto x$ entre $-\infty$ et $+\infty$ est nulle !

Exemple 13.19. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et étudions la nature de l'intégrale généralisée aux deux bornes $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$.

On va étudier $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$. Par Riemann, on sait que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, tandis que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Ces deux intégrales généralisées ne convergent donc jamais simultanément et donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est divergente quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 13.20. — Étudions la nature de l'intégrale généralisée aux deux bornes $\int_0^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}x$.

On va étudier $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}x$. On a déjà vu que $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ est convergente. Examinons maintenant $\int_1^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}x$. On va calculer $\int_1^t \ln x\,\mathrm{d}x$ pour $t > 1$. On a

$$\int_1^t \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_1^t = t\ln t - t + 1 = t\ln t\left(1 + \frac{1}{\ln t} + \frac{1}{t\ln t}\right) \to_{t\to+\infty} +\infty\,.$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}x$ et donc aussi $\int_0^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}x$ sont divergentes.

13.5. Cas des fonctions de signe constant sur l'intervalle d'intégration

Tous les résultats seront énoncés pour des fonctions positives sur l'intervalle d'intégration. Si on a affaire à une fonction f négative sur l'intervalle, alors on étudiera l'intégrale généralisée de $-f$ (qui est positive sur l'intervalle) qui est de même nature que celle de f.

13.5.1. Théorème général. —

Lemme 13.21. — *Si f est une fonction continue positive sur $[a, b[$ (b peut être égal à $+\infty$), alors la fonction*

$$F : [a, b[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

est croissante sur $[a, b[$.

Démonstration. — La fonction F est la primitive de f sur $[a, b[$ qui s'annule en a. Comme f est positive sur $[a, b[$ on en déduit que F est croissante sur $[a, b[$. □

Théorème 13.22. — *Soit f une fonction continue positive sur $[a, b[$ (b peut être égal à $+\infty$). Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si la fonction*

$$F : [a, b[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

est majorée sur $[a, b[$.

Démonstration. — Supposons que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Dans ce cas, la fonction F admet une limite finie ℓ quand $t \to b^-$. Comme par le lemme F est croissante, on en déduit que pour tout $t \in [a, b[$ on a $F(t) \leqslant \ell$. Ce qui prouve que F est majorée sur $[a, b[$.

Supposons que F est majorée sur $[a, b[$. Alors, comme F est une fonction croissante et majorée sur $[a, b[$, elle admet une limite finie quand $t \to b^-$. On en déduit donc que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. □

Remarque 13.23. — On a le même type d'énoncé si l'on suppose f continue sur $]a, b]$.

Exemple 13.24. — Étudions la nature de $\int_0^1 \sin^2(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \sin^2(\frac{1}{x})$ est continue positive sur $]0, 1]$. De plus, pour tout $t \in]0, 1]$, on a

$$F(t) = \int_t^1 \sin^2(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x \leqslant \int_t^1 1\,\mathrm{d}x = 1 - t \leqslant 1$$

ce qui prouve que la fonction F est majorée sur $]0, 1]$. D'après le théorème précédent, l'intégrale $\int_0^1 \sin^2(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ est convergente.

13.5.2. Théorème de comparaison. — Le théorème qui va suivre est la version "pratique" du théorème précédent.

***Théorème 13.25* (Comparaison).** — *Soient f et g deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $I = [a, b[$ (b peut être égal à $+\infty$) et vérifiant*

$$\forall x \in I\,,\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)\,.$$

Alors :

1) *Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi.*

2) *Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge alors $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge aussi.*

Démonstration. — Pour tout $t \in I$, posons $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ et $G(t) = \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$. Puisque $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$, on a

$$\forall t \in I,\ F(t) \leqslant G(t)\,. \tag{13.5.1}$$

1) Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge alors d'après le Théorème 13.22 la fonction G est majorée sur I. Par (13.5.1), la fonction F est majorée sur I et donc, d'après le Théorème 13.22 l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

2) Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge alors d'après le Théorème 13.22 la fonction F n'est pas majorée sur I. Par (13.5.1), la fonction G n'est pas majorée sur I et donc, d'après le Théorème 13.22 l'intégrale généralisée $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. □

Exemple 13.26. — Étudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Sur $[1,+\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$ est continue et positive. De plus, on a

$$\forall x \in [1,+\infty[\,, \quad \frac{\sin^2 x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}\,.$$

On sait par Riemann que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Par le théorème de comparaison, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exemple 13.27. — Étudions la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Sur $]0,1]$ la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue et négative. On va donc étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ qui est généralisée en 0. La fonction $x \mapsto \frac{-\ln x}{1+x^2}$ est maintenant continue et positive sur $]0,1]$. De plus, pour tout $x \in]0,1]$ on a

$$0 \leqslant \frac{-\ln x}{1+x^2} \leqslant -\ln x\,.$$

On a vu que $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème de comparaison, $\int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et donc $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exemple 13.28. — Étudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Sur $[1,+\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue et positive. On sait que $\ln x = o(x^{\frac{1}{2}})$ quand $x \to +\infty$ et donc $\exists A > 1$ tel que $x \geqslant A \Rightarrow \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1 \Rightarrow \ln x \leqslant x^{\frac{1}{2}}$. On a donc, pour tout $x \in [A,+\infty[$,

$$\frac{\ln x}{1+x^2} \leqslant \frac{\ln x}{x^2} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Par Riemann $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ est convergente et donc le théorème de comparaison montre que $\int_A^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Comme $\int_1^A \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ n'est pas généralisée on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exemple 13.29. — Étudions la convergence de $\int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Sur $]0,1]$ la fonction $x \mapsto \frac{1+e^{-x}}{x}$ est continue et positive. De plus, on a, pour tout $x \in]0,1]$,

$$\frac{1+e^{-x}}{x} \geqslant \frac{1}{x} > 0\,.$$

Comme par Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est divergente, le théorème de comparaison montre que $\int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est aussi divergente.

13.5.3. Théorème d'équivalence. — Il s'agit de la forme la plus utilisée pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée. On rappelle qu'il est requis d'avoir des fonctions de signe constant sur l'intervalle d'intégration.

Rappelons que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty,-\infty\}$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que : $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. On note alors $f \sim_{x_0} g$.

Remarque 13.30. — Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0, alors

$$f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque 13.31. —

$$f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow f = g + o_{x_0}(g)$$

Exemple 13.32. — En utilisant les DLs, $\sin x = x + o(x) \sim_0 x$ et $\ln(1+x) = x + o(x) \sim_0 x$.

***Théorème 13.33* (Équivalence).** — *Soient f et g deux fonctions continues positives sur $[a, b[$ (b peut être égal à $+\infty$) et telles que $f \sim_b g$. Alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.*

N.B : On a un énoncé analogue pour $]a, b]$ et $f \sim_a g$.

Démonstration. — Puisque $f \sim_b g$, il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$$

avec $\lim_{x \to b^-} \varepsilon(x) = 0$. Il existe un intervalle $[b - \eta, b[$ où $\eta > 0$, tel que

$$\frac{1}{2} g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2} g(x),\ \forall x \in [b - \eta, b[\,.$$

Le théorème de comparaison montre en utilisant

$$0 \leqslant \frac{1}{2} g(x) \leqslant f(x),\ \forall x \in [b - \eta, b[$$

que si $\int_{b-\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge alors $\int_{b-\eta}^b g(x)\,\mathrm{d}x$ aussi. De même, en appliquant le théorème de comparaison avec

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2} g(x),\ \forall x \in [b - \eta, b[\,,$$

on voit que si $\int_{b-\eta}^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge alors il en est de même pour $\int_{b-\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Enfin, comme f et g sont continues sur le segment $[a, b-\eta]$, les intégrales $\int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^{b-\eta} g(x)\,\mathrm{d}x$ ne sont pas impropres (pas de problème de convergence !).

On a donc montré que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge c'est-à-dire le théorème. □

Exemple 13.34. — Étudions la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{x^4+3x+1}\,\mathrm{d}x$.

Sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x^4+3x+1}$ est continue et positive, de plus on a

$$\frac{2x+1}{x^4+3x+1} \sim_{+\infty} \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}\,.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ est convergente par Riemann. Le théorème d'équivalence montre donc que $\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^4+3x+1}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Comme $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^4+3x+1}\,\mathrm{d}x$ est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$, on conclut que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{x^4+3x+1}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exemple 13.35. — Etudions la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

Sur $[1, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{x+\sin x}{x^2+x+1}$ est continue et positive. De plus,

$$x + \sin x = x\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)$$

et comme $\frac{\sin x}{x} \to_{x\to+\infty} 0$, on a $x+\sin x \sim_{+\infty} x$ et donc
$$\frac{x+\sin x}{x^2+x+1} \sim_{+\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}\,.$$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge par Riemann. Le théorème d'équivalence permet de conclure que $\int_1^{+\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Exemple 13.36. — Étudions la nature de $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Sur $]0,1]$ la fonction $x \mapsto \frac{e^x-1}{x^3}$ est continue et positive. De plus,
$$e^x = 1 + x + o_0(x)$$
donc $e^x - 1 \sim_0 x$. On en déduit que
$$\frac{e^x-1}{x^3} \sim_0 \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}\,.$$
Comme par Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ diverge, le théorème d'équivalence montre que $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

Exemple 13.37. — Étudions la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

Sur $]0,+\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{e^x-1}$ est continue et positive. Cette intégrale présente un problème en 0 et un autre en $+\infty$.

Étude en 0 **:** On a vu dans l'exemple précédent que $\frac{x^3}{e^x-1} \sim_0 x^2$. On a donc $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{e^x-1} = 0$ ce qui montre que $x \mapsto \frac{x^3}{e^x-1}$ se prolonge par continuité en 0. Ainsi, l'intégrale étudiée n'est pas impropre en 0 et donc $\int_0^1 \frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ converge.

Étude en $+\infty$ **:** On a $e^x-1 = e^x(1-e^{-x})$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $e^x-1 \sim_{+\infty} e^x$. Ainsi,
$$\frac{x^3}{e^x-1} \sim_{+\infty} \frac{x^3}{e^x}\,.$$
Or $\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{x^3}{e^x} = 0$ (i.e. $\frac{x^3}{e^x} = o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$), et donc il existe $A > 1$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait $x^2\frac{x^3}{e^x} \leqslant 1$ i.e.
$$0 \leqslant \frac{x^3}{e^x} \leqslant \frac{1}{x^2}\,.$$
Or par Riemann $\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge. Par le théorème de comparaison, $\int_A^{+\infty} \frac{x^3}{e^x}\,\mathrm{d}x$ converge. Par le théorème d'équivalence $\int_A^{+\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ converge. Comme $\int_1^A \frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ n'est pas impropre, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ converge.

On conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

13.5.4. Intégrales généralisées absolument convergentes. — Le but de cette section est de donner une condition suffisante pour que l'intégrale généralisée d'une fonction non forcément de signe constant sur l'intégrale d'intégration soit convergente.

Définition 13.38. — On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente lorsque l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exemple 13.39. — $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. En effet sur $[1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ est continue, positive et de plus
$$\forall x \in [1,+\infty[\,,\quad 0 \leqslant \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\,.$$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente par Riemann. D'après le théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x$ est convergente et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Définition 13.40. — On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente lorsque elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 13.41. — On verra plus tard que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

Notation 13.42. — *Si f est une fonction continue sur un intervalle I, on pose, pour tout $x \in I$:*

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Les fonctions f^+ et f^- ainsi définies sont continues sur I et elles sont à valeurs positives. De plus, on a

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \quad , f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

***Théorème 13.43* (Convergence absolue).** — *Une intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolument convergente est convergente et dans ce cas, on a :*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. — Il n'est pas difficile de voir qu'on peut se ramener à montrer le théorème dans le cas où l'intégrale est généralisée à une seule borne. On se place dans le cas où f est continue sur $[a, b[$ (b peut être égal à $+\infty$). On veut montrer que la fonction $F : t \mapsto F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ admet une limite finie quand $t \to b^-$. Or

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^t (f^+(x) - f^-(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^t f^+(x)\,dx - \int_a^t f^-(x)\,\mathrm{d}x$$

où f^+ et f^- sont continues et positives sur $[a, b[$. Comme $0 \leqslant f^+(x) \leqslant |f(x)|$ et $0 \leqslant f^-(x) \leqslant |f(x)|$ sur $[a, b[$, la convergence de $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ implique celles de $\int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x$ par le théorème de comparaison. Par conséquent, les limites de $\int_a^t f^+(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^t f^-(x)\,\mathrm{d}x$ existent et sont finies quand $t \to b^-$ et donc il en est de même pour $F(t)$.

L'inégalité $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ vient du passage à la limite quand $t \to b^-$ dans l'inégalité $\left|\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^t |f(x)|\,\mathrm{d}x$. □

Exemple 13.44. — L'intégrale généralisée $\int_0^1 \sin(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente et donc covergente. En effet, sur $]0, 1]$ la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est continue, et on a :

$$\forall x \in]0, 1], \quad \left|\sin(\frac{1}{x})\right| \leqslant 1.$$

Or $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x$ est convergente (elle n'est pas impropre et vaut 1) et donc $\int_0^1 \left|\sin(\frac{1}{x})\right|\,\mathrm{d}x$ est convergente par le théorème de comparaison.

Exemple 13.45. — Soit $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente. En effet, sur $[1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x^\alpha}$ est continue et on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leqslant \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge par Riemann. Par le théorème de comparaison, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|\,\mathrm{d}x$ converge.

Remarque 13.46. — De la même manière, pour $\alpha > 1$ l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Remarque 13.47. — Lorsqu'on n'arrive pas à montrer qu'une intégrale généralisée est absolument convergente, il est parfois judicieux d'utiliser une intégration par parties.

Exemple 13.48. — Montrons que pour tout réel $\alpha > 0$, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

D'après l'exemple précédent, on a vu que si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente. On suppose donc que $\alpha \in]0,1]$. On considère, la fonction $F : t \mapsto \int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ sur $[1,+\infty[$ et on fait une intégration par parties. Pour $u = \frac{1}{x^\alpha}$ et $v' = \cos x$, alors $u' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et $v = \sin x$. On a donc

$$F(t) = \int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin x}{x^\alpha}\right]_1^t + \alpha \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Comme $\alpha + 1 > 1$, d'après la remarque qui suit l'exemple précédent, l'intégrale $\int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x$ a une limite finie quand $t \to +\infty$. De plus, on a $0 \leqslant \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \to_{t\to+\infty} 0$ et donc $\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} = 0$. On en déduit que $F(t)$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$ et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge pour $\alpha \in]0,1]$ et donc aussi pour $\alpha > 0$.

Remarque 13.49. — De la même manière on montre que pour tout réel $\alpha > 0$, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Comme autre outil important, on a le théorème de changement de variable.

Théorème 13.50. — *Si φ est une application bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ sont de même nature. Si elles convergent, elles sont égales.*

Démonstration. — La preuve découle de la formule de changement de variable classique et on passe ensuite à la limite aux bornes où les intégrales sont généralisées. □

Exemple 13.51. — Montrons que $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ est convergente.

Posons $t = x^2$. On a alors $x = \sqrt{t}$ (t est > 0) et donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ par changement de variable, et est donc convergente car on a vu que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente (la remarque qui suit l'exemple précédent). On a donc $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 13.52. — À l'aide du changement de variable $x = \cos t$, étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ et en cas de convergence calculer sa valeur.

La fonction $t \mapsto \cos t$ réalise une bijection décroissante de $]0,\frac{\pi}{2}[$ (en fait $]\frac{\pi}{2},0[$ dans le théorème de changement de variable) sur $]0,1[$. Par changement de variable notre intégrale est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\sin t}}(-\sin t)\,\mathrm{d}t$. On a

$$1 + \cos t = 1 + \cos(2\frac{t}{2}) = 1 + \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = 2\cos^2\frac{t}{2}$$

et

$$1 - \cos t = 1 - \cos(2\frac{t}{2}) = 1 - \cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2} = 2\sin^2\frac{t}{2}\,.$$

Ainsi,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\sin t}}(-\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\sin t}}\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}}\sin t\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\sin t}}(-\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,.$$

Il vient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\sin t}}(-\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

et la dernière intégrale n'est pas généralisée car $t \mapsto \cos^2\frac{t}{2}$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. Le théorème de changement de variable permet de conclure que $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\sin t}}(-\sin t)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

On a

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\frac{t}{2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}+1,.$$

13.6. Exercices

13.6.1. Révision. —

Exercice 220

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x^2\,e^x\,dx\ ,\ \int_e^{e^2} \ln x\,dx,\ \int_2^e \frac{dx}{x\,\ln x}\ ,\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1}\ ,\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2}\ ,\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2-x-1},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx\ ,\ \int_{3/2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\ ,\ \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+2x+2}\,dx,\ \int_{-1}^{0} \arctan x\,dx$$

$$\int_0^1 (x^{2/3}-2x^{1/4})\,dx\ ,\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{(x-1)^3}\ ,\ \int_1^2 \frac{x+1}{x^2}\,dx.$$

Exercice 221

À l'aide de l'intégration par parties, calculer les primitives et les intégrales suivantes :

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx\ ,\ \int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx\ ,\ \int_1^2 \frac{x\,\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx,\ \int_0^{\pi/2} \cos x\ \ln(1+\cos x)\,dx.$$

Exercice 222

Calculer la primitive et les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ \ (\text{poser } y=1/x) \text{ et } x>1\ ,\ \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}\ \ (y=e^{-x})\ ,\ \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}\ \ (y=\sqrt{x+1})$$

Exercice 223

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que l'on a, pour tout $n \geqslant 2$: $I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}$.

3) En déduire les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 224

On considère la fonction F donnée par

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1) Vérifier que sur $]1, +\infty[$, la fonction F est bien définie.

2) Montrer que sur cet intervalle, F est dérivable et que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Exercice 225

Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}\,dx$. (Réponse : $\frac{1}{12}$)

Exercice 226

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left(\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx \right) \iff f \text{ est de signe constant sur } [a,b].$$

13.6.2. Intégrales impropres. —

Exercice 227

Soit ε un nombre réel strictement positif. Calculer chacune des intégrales suivantes, puis déterminer la limite lorsque ε tend vers 0 de l'expression obtenue. En déduire la nature de l'intégrale généralisée correspondante et préciser sa valeur en cas de convergence.

$$\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx\,,\ \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,,\ \int_\varepsilon^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx\,,\ \int_{\varepsilon-1}^0 \ln(1+x)\,dx\,,\ \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}.$$

Exercice 228

Soit A un nombre réel strictement positif. Calculer les intégrales suivantes, puis déterminer la limite lorsque A tend vers $+\infty$ de chaque expression ainsi obtenue. En déduire la nature de l'intégrale générale correspondante et préciser sa valeur en cas de convergence.

$$\int_0^A \arctan x\,dx\,,\ \int_1^A x\,e^{-x}\,dx\,,\ \int_{-A}^0 \frac{dx}{1+x^2}\,,\ \int_0^A x\,e^{x^2}\,dx,\ \int_1^A \ln x\,dx\,,\ \int_{-A}^A \frac{dx}{1+x^2}.$$

Exercice 229

En vous inspirant des exercices précédents, étudier la nature des intégrales généralisées suivantes et les calculer en cas de convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}\,,\ \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4}\,,\ \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x^2+4}\,,\ \int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx\,,\ \int_0^{+\infty} x^2\,e^{-x}\,dx.$$

Exercice 230

1) À l'aide des développements limités, établir les équivalences suivantes :

$$\sin x \underset{0}{\sim} x\,,\ \ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2\,,\ 1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}\,,\ -x^2+x+1 \underset{+\infty}{\sim} -x^2,$$

$$\sqrt{x^3+1} \underset{+\infty}{\sim} x^{3/2}\,,\ e^x - x + 1 \underset{+\infty}{\sim} e^x.$$

2) Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}\,,\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x^2)}\,dx\,,\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx\,,\ \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{-x^2+x+1}\,dx\,,\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x-x+1}.$$

Exercice 231

Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x}}\,dx\ ,\ \int_0^{+\infty} \frac{x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x}\,dx\ ,\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)}\,dx\ ,\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-x}\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\ln x-\sin x}{1+x^2}\,dx\ ,\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{e^x}\,dx\ ,\ \int_0^{+\infty} (1+x+x^2)\,e^{-x}\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^5}}\,dx\ ,\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-e}}\ ,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx.$$

Exercice 232

Étudier, en fonction du paramètre réel a, la nature des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a}\ ,\ \int_1^{+\infty} \frac{x^a}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\ ,\ \int_1^{+\infty} \frac{x^a}{\sqrt{\ln x}}\,dx\ ,\ \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^a}\,dx.$$

Exercice 233

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$ est convergente, puis la calculer.
Indication : pour le calcul, on pourra utiliser une intégration par parties.
Réponse : 0.

Exercice 234

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\,(x+2)}$ est convergente, puis la calculer.
Réponse : $\ln 2$.

Exercice 235

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ converge.

2) a) Déterminer a, b, c réels tels que $\displaystyle\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$.

b) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$. *Réponse :* $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Exercice 236

On se propose de démontrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ converge et de calculer sa valeur.
Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et considérons l'intégrale $I_\varepsilon = \displaystyle\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

1) Expliquer pourquoi I_ε n'est pas une intégrale impropre.

2) a) Vérifier que : $-x^2+2x+3 = 4\left(1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)$.

b) En déduire à l'aide d'un changement de variable bien choisi que

$$I_\varepsilon \;=\; -\frac{\pi}{6} - \arcsin\big(-1+\frac{\varepsilon}{2}\big).$$

3) En conclure que I converge et préciser sa valeur.

Exercice 237

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ est convergente, puis la calculer.
Indication : on pourra écrire $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}$.
Réponse : $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 238

Soient α et β deux nombres réels fixés. Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1),$$

et

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha (|\ln x|)^\beta} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Exercice 239

Pour a réel fixé, on pose

$$\Gamma(a) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{a-1}\, dx.$$

1) Pour quelles valeurs de a, l'intégrale $\Gamma(a)$ existe-t-elle ?

2) Soit $a > 0$. Calculer $\Gamma(a+1)$ en fonction de $\Gamma(a)$.

3) En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : la fonction $x \mapsto \Gamma(x)$ ainsi définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est appelée **la fonction Gamma d'Euler** et joue un rôle important en Analyse et en Arithmétique.

Exercice 240

Pour a et b réels, on pose

$$\beta(a,b) \;=\; \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\, dx.$$

1) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles l'intégrale $\beta(a,b)$ est convergente.

2) Montrer que pour ces valeurs de a et b, on a

$$\beta(a,b) \;=\; \beta(b,a).$$

Remarque : comme la fonction Γ, la fonction β fait partie des fonctions dites **eulériennes**. On peut montrer que l'on a la relation suivante :

$$\beta(a,b) \;=\; \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Exercice 241

1) Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx \;=\; \frac{1-\cos t}{t} + \int_0^t \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.$$

2) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge.

Exercice 242

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-ax}\, dx$ est absolument convergente et que

$$\Big|\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-ax}\, dx\Big| \leqslant \frac{1}{a}.$$

Exercice 243

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, e^{\sin x}\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \,\ln x}{x^{3/2}+3}\, dx$ sont absolument convergentes.

Exercice 244

Pour tout réel $0 < \alpha \leqslant 1$, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx$ est divergente. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ est semi-convergente.

Indication : $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Exercice 245

Montrer que, pour tout $e \in]0,1[$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos(\theta))^2} = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

À cette fin, on pourra procéder comme suit.

1) Expliquer pourquoi

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos(\theta))^2} = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos(\theta))^2}\,.$$

2) À l'aide du changement de variable $u = \tan(\theta/2)$, établir que

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos(\theta))^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{(\alpha+\beta u^2)^2}\mathrm{d}u\,,$$

où $\alpha = 1+e$ et $\beta = 1-e$. On justifiera que les intégrales en présence sont bien convergentes.

3) Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos(\theta))^2} = \frac{2}{(\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty} \frac{\beta+\alpha v^2}{(1+v^2)^2}\mathrm{d}v\,.$$

4) En déduire que

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos(\theta))^2} = \frac{1}{(\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}}\left(\beta\pi + (\alpha-\beta)\int_0^{+\infty} v\frac{2v}{(1+v^2)^2}\mathrm{d}v\right)\,.$$

5) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} v\frac{2v}{(1+v^2)^2}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}\,,$$

et conclure.

CHAPITRE 14

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

14.1. Suites de fonctions

14.1.1. Suite de fonctions et convergence simple. —

***Définition 14.1* (Suite de fonctions numériques réelles)**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une **suite de fonctions numériques réelles**, notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (f_n), est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une fonction $f_n : I \to \mathbb{R}$ définie sur I et à valeurs réelles.

Remarque 14.2. —

1. Toutes les fonctions sont définies sur le même intervalle I.
2. Comme pour les suites numériques, la suite (f_n) peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, auquel cas on pourra la noter $(f_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemple 14.3. — La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $f_n : x \in]0,1] \mapsto f_n(x) = \ln(1+nx)$ est une suite de fonctions numériques réelles définie sur $I =]0,1]$.

Comme pour les suites numériques, on cherchera à étudier le comportement, quand $n \to +\infty$, d'une suite de fonctions (f_n). Cela suppose qu'on s'est fixé une notion de convergence.
Le plus naturel est de se ramener à ce qu'on connaît comme notion de convergence pour les suites réelles : on se fixe $x \in I$ et on regarde si la *suite numérique* $\Big(f_n(x)\Big)$ converge. Si oui et s'il y a convergence pour tout $x \in I$, on peut construire une fonction $f : x \in I \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Cela donne la notion de *convergence simple.*

***Définition 14.4* (Convergence simple).** — On dit qu'une suite de fonctions (f_n) définies sur un intervalle I **converge simplement** sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si : pour tout $x \in I$, la suite de réels $\Big(f_n(x)\Big)$ converge vers $f(x)$,

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\,.$$

On peut noter "$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} f$ sur I" pour indiquer que la suite (f_n) converge simplement vers f sur l'intervalle I.

Remarque 14.5. — La définition précédente se formalise de la manière suivante : $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} f$ sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Big(n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$.

On remarquera que le choix de N dépend en général de x.

Exemple 14.6. —

1. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions définies sur $I = [1,+\infty[$, de terme général
$$f_n : x \in I \mapsto f_n(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{n}}\,.$$
Pour tout $x \in I$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$. Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur I vers la fonction $f : x \in I \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. On considère la même suite de fonctions que précédemment mais définies sur $I = [0,+\infty[$. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(0) = n$, donc que $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = +\infty$: la suite diverge en $x = 0$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne converge pas simplement sur $[0,+\infty[$.

Exemple 14.7. — On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions définies sur $I = [0,+\infty[$, de terme général
$$f_n : x \in I \mapsto f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\,.$$
Pour tout $x \in I$, $f_n(x) = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$ et $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Par suite $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ pour tout $x \in I$: la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplementsur I vers la fonction $f : x \in I \mapsto f(x) = e^x$.

Exemple 14.8. — On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions définies sur $I = [0,1]$, de terme général
$$f_n : x \in I \mapsto f_n(x) = x^n\,.$$
On note que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $f_n(1) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ tandis que pour tout $x \in]0,1[$, $f_n(x) = e^{n\ln(x)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $\ln(x) < 0$). Par suite la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur I vers la fonction $f : x \in I \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

On observe sur ce dernier exemple que, bien que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ soit composée de fonctions continues, elle converge simplement vers une fonction f qui ne l'est pas. Ce problème motive l'introduction d'une autre notion de convergence.

14.1.2. Convergence uniforme. — Nous commençons par quelques notions relatives aux bornes supérieures.

14.1.2.1. *Norme infinie.* — Le lecteur est renvoyé à la section **??**.

Définition 14.9. — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On pose :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)| = \sup\left\{|f(x)|, x \in I\right\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\,.$$

Exemple 14.10. — Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f : x \in [0,1] \mapsto f(x) = x^n$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = nx^{n-1}$. D'où le tableau de variations (pour $n \geqslant 2$) :

x	0		1
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

Par suite $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$, donc $\|f\|_\infty = \sup[0,1] = 1$.

Exemple 14.11. — Soit $n \in N^\star$ et $g : x \in [0,1[\mapsto f(x) = x^n$. La fonction g est dérivable et croissante. Par suite $g([0,1[) = [g(0), \lim_{x\to1,x<1} g(x)[= [0,1[$, donc $\|g\|_\infty = \sup[0,1[= 1$.

Nous signalons les propriétés souvent utiles suivantes :

Proposition 14.12. — *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques et $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$, $\|g\|_\infty = \sup_{x\in I} |g(x)|$.*

1. *S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$, alors $\|f\|_\infty \leqslant M$.*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$.*
3. *$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*
4. *$\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$.*

Démonstration. —

1. S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$, alors M est un majorant de $|f|$. Donc $\|f\|_\infty \leqslant M$ car $\|f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de $|f|$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$, $|\lambda f(x)| = |\lambda| \times |f(x)|$. Donc $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$.
3. Pour tout $x \in I$, $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)|$ (inégalité triangulaire). Or pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ et $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$. Donc $\forall x \in I$, $|f(x) + g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et par suite $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
4. Pour tout $x \in I$, $|f(x) \times g(x)| = |f(x)| \times |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$. Donc $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$.

□

La preuve de la propriété suivante est laissée en exercice.

Proposition 14.13 **(Norme du sup sur les fonctions bornées)**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Notons $\mathscr{B}(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques bornées sur I. Alors l'application $\|.\|_\infty : \mathscr{B}(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie une ***norme*** *sur $\mathscr{B}(I, \mathbb{R})$, c'est à dire vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathscr{B}(I, \mathbb{R})$: $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$;*
2. *pour tout $f \in \mathscr{B}(I, \mathbb{R})$: $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$;*
3. *pour tout $f, g \in \mathscr{B}(I, \mathbb{R})$: $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*

14.1.2.2. *Convergence uniforme.* —

Définition 14.14 **(Convergence uniforme).** — On dit qu'une suite de fonctions (f_n) définies sur un intervalle I **converge uniformement** sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si la suite de réels $\Big(\|f_n - f\|_\infty\Big)$ converge vers 0,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0\,.$$

On peut noter "$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur I" pour indiquer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle I.

Remarque 14.15. — La définition précédente peut se formaliser de la manière suivante : $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur I si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Big(n \geqslant N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon\Big)$.

Exemple 14.16. — On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions définies sur $I = [1, +\infty[$, de terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{x + \frac{1}{n}}$. On a vu à l'exemple 14.6 que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} f$

sur I avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On veut montrer que la convergence est uniforme sur I. Pour tout $x \in I$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{x+\frac{1}{n}} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - x - \frac{1}{n}}{x\left(x+\frac{1}{n}\right)}\right| = \frac{1}{nx^2+x}.$$

On veut montrer que $\sup_{[1,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et nous illustrons les deux manières de procéder.

— Posons $g_n(x) = \dfrac{1}{nx^2+x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on analyse les variations de g_n. On a $g_n'(x) = -\dfrac{2nx+1}{(nx^2+x)^2}$. On en déduit le tableau de variations :

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & & +\infty \\ \hline g_n'(x) & & - & \\ \hline & \frac{1}{n+1} & & \\ g_n(x) & & \searrow & \\ & & & 0 \end{array}.$$

Ainsi $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{[1,+\infty[} g_n = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et on peut conclure : $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur l'intervalle I.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on majore g_n sur $[1, +\infty[$ par une fonction de n. La condition $x \geqslant 1$ implique que $nx^2 + x \geqslant n + 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{1}{nx^2+x} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Par conséquent, pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Donc, par la prop. 14.12, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut conclure : $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur l'intervalle I.

Exemple 14.17. — On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions définies sur $I = [0,1]$, de terme général $f_n(x) = x^n$. On a vu à l'exemple 14.8 que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur I avec $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. On veut analyser si (f_n) converge uniformément vers f sur I. On a : $|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 - 1 = 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1$, c'est à dire $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Donc la suite $\big(\|f_n - f\|_\infty\big)$ ne converge pas vers zéro et la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I.

14.1.2.3. *Convergence simple et convergence uniforme.* — Dans les exemples 14.16 et 14.17 nous avons analysé la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) vers f puis analysé si cette convergence était uniforme. On a de fait la propriété suivante :

Proposition 14.18. — *Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I, alors (f_n) converge simplement vers la fonction f sur I :*

$$\left(f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f\right) \Rightarrow \left(f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f\right).$$

Démonstration. — On suppose que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I, donc que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Observons que pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$, par suite : pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On conclut : $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur I. $\square$

La proposition 14.18 fournit donc une méthode pratique : pour étudier la convergence uniforme sur un intervalle I d'une suite de fonctions (f_n) on commence par étudier la convergence simple. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I, on détermine cette fonction puis on étudie la convergence uniforme. Pour cela :

1. on étudie les variations de $|f_n(x)-f(x)|$ sur I ou on cherche à majorer $|f_n(x)-f(x)|$ sur I par une quantité indépendante de x et qui tend vers zéro quand $n \to \infty$, montrant ainsi que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ (cf. l'exemple 14.16) ;
2. si au contraire on veut montrer que la convergence n'est pas uniforme, on minorera $\|f_n - f\|_\infty$ par une quantité (indépendante de x) qui ne converge pas vers zéro quand $n \to \infty$. On illustre ce mode de raisonnement dans l'exemple 14.19 ci-après.

Exemple 14.19. — On considère à nouveau la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions définies sur $I=[0,1]$, de terme général $f_n(x)=x^n$. On sait (cf. exemple 14.8) que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ avec $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sur I.
On va montrer que la convergence n'est pas uniforme sur I et on illustre les deux méthodes.

— Première méthode. On cherche à calculer $\sup_{[0,1]} |f_n - f|$.
Pour $x \in [0,1[$ on a $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = x^n$. On fait l'étude de cette fonction sur $[0,1[$: $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & 1 \\ \hline g_n'(x) & 0 & + & \\ \hline & & & 1 \\ g_n(x) & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array}$. Par suite $\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = 1$.
Par ailleurs $|f_n(1) - f(1)| = 0$. En conclusion $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$. En conséquence, la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ ne tend pas vers zéro quand $n \to \infty$ et la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I.

— Deuxième méthode. On cherche à minorer $\|f_n - f\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, posons $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} \in [0,1[$. On a :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Par suite, pour tout $n \in N^\star$, $\|f_n - f\|_\infty \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$. Or $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. En conséquence, la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ ne tend pas vers zéro quand $n \to \infty$ et la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I.

Exemple 14.20. — On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions de terme général $f_n(x) = n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f_n(x) = x + \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x$ tandis que $f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$. Donc $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur $[0,+\infty[$ avec $f(x) = x$.

1. Soit $A > 0$ et $I_A = [0, A]$. On considère ici les fonctions f_n et f en restriction à I_A. On veut montrer que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I_A.
   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in I_A$, posons $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - x$. Cette

fonction g_n est dérivable sur I_A, de dérivée :

$$g_n'(x) = n\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} - 1 = \frac{n}{x+n} - 1 = -\frac{x}{x+n} \leqslant 0\,.$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & & A \\
\hline
g_n' & & - & \\
\hline
 & 0 & & \\
g_n & & \searrow & \\
 & & & n\ln\left(1+\frac{A}{n}\right) - A
\end{array}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sup_{x\in[0,A]} |f_n(x) - f(x)| = A - n\ln\left(1+\frac{A}{n}\right) = \underset{n\to\infty}{o}(1) \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

On peut conclure : $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $[0, A]$.

2. On veut montrer que (f_n) ne converge pas uniformement vers f sur $[0, +\infty[$. Illustrons deux méthodes :
   — Première méthode (analyse de fonctions). On reprend les notations et l'éude précédente :

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & & +\infty \\
\hline
g_n' & & - & \\
\hline
 & 0 & & \\
g_n & & \searrow & \\
 & & & -\infty
\end{array}$$

   Donc $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Aussi la suite (f_n) ne converge pas uniformement vers f sur $[0, +\infty[$.
   — Deuxième méthode (minoration). Posons $x_n = n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. On a : $|f_n(x_n) - f(x_n)| = n(1 - \ln(2))$ et par suite, pour tout $n \in N^\star$, $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)\| \geqslant n(1-\ln(2)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ ne tend donc pas vers zéro quand $n \to \infty$ et la suite (f_n) ne converge pas uniformement vers f sur $[0, +\infty[$.

14.1.3. Convergence uniforme et continuité. — L'interêt de la convergence uniforme réside principalement dans le résultat fondamental suivant :

***Théorème 14.21* (Convergence uniforme et continuité)**

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration. — Rappelons la définition de la continuité en un point : la fonction f est continue en point $x_0 \in I$ si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\Big(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big)$.

Soit donc $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Observons que pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|
\end{aligned}$$

On va majorer chacun des 3 termes précédents.

— On sait que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$ car $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur I. Donc : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{3}$ si $n \geqslant n_0$. Comme pour tout $x \in I$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$ et $|f(x_0) - f_n(x_0)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$, on en déduit : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$\begin{cases} |f(x) - f_n(x) \leqslant |\frac{\varepsilon}{3} \\ |f(x_0) - f_n(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$ pour tout $n \geqslant n_0$. (On va prendre $n = n_0$ par la suite).

— On sait que (f_n) est une suite de fonctions continues sur I. En particulier f_{n_0} est continue en x_0. Donc : il existe $\eta > 0$ tel que $\left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$

Faisons le bilan : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \eta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

et par suite $\Big(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big)$, ce qui achève la preuve. □

Remarque 14.22. — Pour certaines suites de fonction continues (f_n), on peut avoir $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} f$ sur I et f continue sur I sans que la convergence soit uniforme : la condition $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur I est une condition suffisante mais non nécessaire pour que f soit continue sur I. Cf. exemple 14.20.

14.1.4. Convergence uniforme, intégration et dérivation. — On a vu précédemment que si une suite $\big(f_n\big)$ de fonctions continues sur un intervalle converge uniformement vers f sur un intervalle I, alors f est continue sur I. Ces fonctions étant continues, et si I est un segment, leurs intégrales $\int_I f_n(x)dx$ et $\int_I f(x)dx$ sont bien définies. Le théorème suivant permet de les comparer :

Théorème 14.23 **(Convergence uniforme et intégration)**

Soit $\big(f_n\big)$ une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ $(-\infty < a \leqslant b < +\infty)$. Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$.

Démonstration. — Comme $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $[a, b]$ on a $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ où $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$. Or pour $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \\ &\leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx \end{aligned}$$

car pour tout $x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$. Ainsi :

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \int_a^b dx \leqslant (b - a)\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

En conclusion : $\int_a^b f_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$. □

Exemple 14.24. — On a vu à l'exemple 14.20 que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $[0, 1]$ où $f_n(x) = n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ et $f(x) = x$. Donc, par le théorème 14.23 : $\int_0^1 n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Comme de coutume, les choses sont un peu plus compliquées avec la dérivation :

Théorème 14.25 **(Convergence uniforme et dérivation)**

Soit $\big(f_n\big)$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. On suppose :

1. *$f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} g$ sur $[a,b]$;*
2. *il existe $c \in [a,b]$ tel que la suite numérique $\big(f_n(c)\big)$ converge.*

Alors $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $[a,b]$ où f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ dont la dérivée est g.

Démonstration. — La suite des dérivées $\big(f_n'\big)$ est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ et $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} g$ sur $[a,b]$: pour tout $x \in [a,b]$, on peut appliquer le théorème d'intégration 14.23 sur l'intervalle $[c,x]$ (si $x \geqslant c$) ou $[x,c]$ (si $x \leqslant c$) : $\int_c^x f_n'(t)dt \underset{n\to\infty}{\to} \int_c^x g(t)dt$.
Pour tout $x \in [a,b]$ posons : $f(x) = \int_c^x g(t)dt + \ell$ où $\ell = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$, et observons que, pour tout $x \in [a,b]$: $f_n(x) = \int_c^x f_n'(t)dt + f_n(c) \underset{n\to\infty}{\to} \int_c^x g(t)dt + \ell = f(x)$. Autrement dit, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} f$ sur $[a,b]$. Montrons à présent que la convergence est uniforme. Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\int_c^x f_n'(t)dt + f_n(c) - \int_c^x g(t)dt - \ell\right| \\
&\leqslant \left|\int_c^x |f_n'(t) - g(t)|dt\right| + |f_n(c) - \ell| \\
&\leqslant \left|\int_c^x \|f_n' - g\|_\infty dt\right| + |f_n(c) - \ell| \qquad (14.1.1) \\
&\leqslant |x-c|\|f_n' - g\|_\infty + |f_n(c) - \ell| \\
&\leqslant (b-a)\|f_n' - g\|_\infty + |f_n(c) - \ell| \underset{n\to\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $[a,b]$. Observons enfin que $f(x) = \int_c^x g(t)dt + \ell$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ car g est continue et que $f' = g$. □

Exemple 14.26. — On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de fonctions de terme général $f_n(x) = n^2\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - nx$. Les fonctions f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $f_n'(x) = n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$. La suite (f_n') a été étudiée à l'exemple 14.20. En particulier, pour tout $A > 0$:

1. $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} g$ sur $[0,A]$ avec $g(x) = x$;
2. on observe par ailleurs que $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

En application du théorème de dérivation 14.25, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $[0,A]$ où f est la fonction $\mathcal{C}^1$ définie par : $f(x) = \int_0^x g(t)dt + \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \frac{x^2}{2}$.
Comme ce résultat est vrai pour tout $A > 0$, on en déduit que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} f$ sur $[0,+\infty[$ et que $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[)$ (ce qui est évident sur cet exemple, connaissant explicitement f).

14.1.5. Convergence uniforme et critère de Cauchy. —

***Définition 14.27* (Critère de Cauchy pour la norme du sup)**
Soit $\big(f_n\big)$ une suite de fonctions numériques bornées définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit qu'elle vérifie le **critère de Cauchy** pour la norme du sup si : $\|f_n - f_p\|_\infty \xrightarrow[n,p\to\infty]{} 0$.

Remarque 14.28. — La notation $\|f_n - f_p\|_\infty \underset{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ signifie précisément : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\left\{\begin{array}{l} n \geqslant N \\ p \geqslant N \end{array}\right. \Rightarrow \|f_n - f_p\|_\infty < \varepsilon\right)$

Le résultat suivant montre qu'il y a équivalence entre vérifier le critère de Cauchy [1] et converger uniformément :

Théorème 14.29 **(Convergence uniforme et critère de Cauchy pour les suites de fonctions)**
Soit (f_n) une suite de fonctions numériques bornées définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *La suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy pour la norme du sup sur I.*
2. *Il existe une fonction f bornée définie sur I telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I.*

Démonstration. —

1. **1. implique 2.** On suppose que suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy sur I.
   (a) Étape 1 : on montre l'existence d'une fonction f telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur I.
   Soit $x_0 \in I$. Comme $|f_n(x_0) - f_p(x_0)| \leqslant \|f_n - f_p\|_\infty$, on sait que $|f_n(x_0) - f_p(x_0)| \underset{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci veut dire que la suite réelle $\big(f_n(x_0)\big)_n$ est de Cauchy. Cette suite converge donc dans $\mathbb{R}$ qui est complet [2]. On note $f(x_0)$ cette limite : $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$. Puisque x_0 peut être choisi arbitrairement dans I, on obtient ainsi une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$ sur I.
   (b) Étape 2 : f est bornée.
   (c) Étape 3 : on montre que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I.
   Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\left\{\begin{array}{l} n \geqslant N \\ p \geqslant N \end{array}\right. \Rightarrow \|f_n - f_p\|_\infty < \varepsilon\right)$.
   Soit $x \in I$. On a $|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \|f_n - f_p\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $(n \geqslant N, p \geqslant N)$.
   On fixe n $(n \geqslant N)$ et on fait tendre $p \to \infty$. On sait que $f_p(x) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ (étape 1), donc $f_n(x) - f_p(x) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f_n(x) - f(x)$. Par suite : $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.
   Dans ce raisonnement, $x \in I$ est arbitraire. On a donc obtenu : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Big(n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\Big)$. Ceci montre que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I.
2. **2. implique 1.** On suppose que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur I. Montrons qu'alors la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\big(n \geqslant N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Supposons à présent $(n \geqslant N, p \geqslant N)$: on a $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|f_p - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et
$$\|f_n - f_p\|_\infty = \|f_n - f + f - f_p\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty + \|f_p - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

1. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français, considéré comme le fondateur de l'analyse moderne
2. Dire que "$\mathbb{R}$ est complet", c'est précisément dire que toute suite réelle de Cauchy converge.

On vient donc de montrer : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\begin{cases} n \geqslant N \\ p \geqslant N \end{cases} \Rightarrow \|f_n - f_p\|_\infty < \varepsilon\right)$. Ceci montre que la suite (f_n) satisfait au critère de Cauchy.

□

Remarque 14.30. — L'intérêt du critère de Cauchy est qu'il permet de montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) sans avoir à expliciter la fonction limite f.

14.2. Exercices

14.2.1. Convergence simple. —

Exercice 246

Étudier la convergence simple sur $[0, 2\pi]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ où :

$$f_n(x) = \sin(x)\exp(1 - x/n), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Exercice 247

Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ où :

$$g_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Exercice 248

Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(k_n)_{n\geqslant 0}$ où :

$$k_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^2}{(1 + x^2)^p},$$

$x \in \mathbb{R}$.

Exercice 249

Étudier la convergence simple sur $]0, +\infty[$ de la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 0}$ où :

$$h_n(x) = \ln(x^4 + nx^2), \quad x \in]0, +\infty[.$$

14.2.2. Convergence uniforme. —

Exercice 250

Calculer la norme du sup $\|f\|_\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \arctan(x), \quad f_2(x) = \frac{x}{1 + x^2}, \quad f_3(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}.$$

Exercice 251

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ où :

$$f_n(x) = \big(\sin(x)\big)\exp(1 - x/n), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Soit $f(x) = e\sin(x)$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n>0}$ vers f sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 252

Soit la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ où :
$$g_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$
Soit $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence uniforme de $(g_n)_{n\geqslant 0}$ vers g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 253

Soit la suite de fonctions $(k_n)_{n\geqslant 0}$ où :
$$k_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^p}\,, x \in \mathbb{R}\,.$$
Soit $k(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 + x^2 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$. Étudier la convergence uniforme de $(k_n)_{n\geqslant 0}$ vers k sur $\mathbb{R}$.

14.2.3. Convergence uniforme et continuité. —

Exercice 254

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit : $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \text{ si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \text{ si } x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0,1]$.
2. Même question sur l'intervalle $[\varepsilon, 1]$, pour ε un réel appartenant à $]0,1[$.

Exercice 255

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$. Soit $S_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)|$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que (S_n) tend vers zéro. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

Qu'en est-il lorsque (S_n) converge vers un réel non nul S ?

14.2.4. Convergence uniforme, intégration et dérivation. —

Exercice 256

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on définit : $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les intégrales $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$, puis la limite $\lim_{n\to\infty} I_n$.
3. En vous aidant des résultats précédents, étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,1]$.

Exercice 257

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qu'on déterminera.
2. Montrer que pour tout $A > 0$, les intégrales $I_n(A) = \int_0^A f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $I(A) = \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ sont bien définies, puis comparer $\lim_{n\to\infty} I_n(A)$ et $I(A)$.

3. Montrer que les intégrales généralisées $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent, puis comparer $\lim_{n\to\infty} I_n$ et I.

Exercice 258

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0, 2\pi]$ on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, 2\pi]$.
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite des dérivées (f_n') sur $[0, 2\pi]$.
3. Que pouvez-vous conclure de cet exemple ?

Exercice 259

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{x^2 + k^2}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On appellera f la limite de (f_n).
2. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$.

14.2.5. Convergence uniforme et critère de Cauchy. —

Exercice 260

1. Montrer que toute fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$ est nécessairement constante.
2. Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale.

14.3. Séries de fonctions, convergence simple et absolue

Cette section est dédié à l'études des suites de fonctions numériques. On y aborde principalement deux notions de convergence, simple et normale, puis celle de convergence uniforme. A l'issue de ce chapitre, l'étudiant sera en capacité : de définir et d'analyser la convergence simple et absolue d'une série de fonctions sur un intervalle ; de définir et d'analyser la convergence normale et uniforme d'une série de fonctions sur un intervalle ; d'appliquer les théorèmes de continuité, d'intégration et de dérivation relatifs aux séries de fonctions uniformément convergentes.

Dans tout ce chapitre, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite fonctions réelles définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition 14.31 **(Série de fonctions et sommes partielles)**

La **série de fonctions** sur I notée $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, est la donnée pour tout $x \in I$ de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$. On dit que f_n est le **terme général** de cette série. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série.

Remarque 14.32. — Comme pour les séries numériques, la série de fonctions peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, auquel cas on pourra la noter $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$.

Comme pour les séries numériques, on cherche à donner du sens à la somme formelle $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, ce qui suppose de définir une notion de convergence. Nous commençons par la convergence simple :

***Définition 14.33* (Convergence simple, convergence absolue)**
On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge en** $x \in I$ si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge ; dans ce cas la limite $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ est la **somme de la série** en x.
On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge simplement** (CVS) sur I si elle converge en tout point de I. Dans ce cas la fonction notée $\sum_{n=0}^{\infty} f_n : x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ est appelée **somme de la série**.
On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge absolument** (CVA) sur I si la série $\sum_{n\geqslant 0} |f_n|$ CVS sur I.

Remarque 14.34. —

1. Dire que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I, de somme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, est équivalent à dire que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} f$ sur I où (S_n) désigne la suite des sommes partielles de la série et f sa limite simple.
2. Par une propriété sur les séries numériques : $(\sum_{n\geqslant 0} f_n\ CVA$ sur $I) \Rightarrow (\sum_{n\geqslant 0} f_n\ CVS$ sur $I)$.

***Définition 14.35* (Reste d'ordre n d'une série simplement convergente)**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions CVS sur I. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, la somme $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ est appelée **reste d'ordre** n de la série en x.

Remarque 14.36. — Dans la définition précédente, comme la série converge simplement sur I, le reste d'ordre n en x est bien défini. Par ailleurs $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} 0$ sur I.

L'analyse de la convergence simple se ramène le plus souvent à appliquer des règles concernant les séries numériques : séries géométriques, convergence absolue, séries alternées, séries de Riemann [3], règles de Cauchy et de d'Alembert [4], théorème de comparaison, équivalents.

Exemple 14.37. — On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où $f_n(x) = x^n$ sur $I =]-1, 1[$. (Remarque : $x^0 = 1$). Il s'agit de la série géométrique : elle converge simplement sur I, de somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n : x \in I \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Exemple 14.38. — On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}$. Montrons la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$. Pour cela observons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2+n^2}$. Comme $\dfrac{1}{x^2+n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ converge par le critère de Riemann. Par suite $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ CVA, donc elle converge. Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, de somme la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

3. Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand, auteur de contributions marquantes en analyse et en géométrie.
4. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), mathématicien et philosophe français.

Exemple 14.39. — On considère la série de fonctions de terme général : $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer la CVS de la série sur $\mathbb{R}$. Pour cela observons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé :

— on a $f_n(x) = (-1)^n g_n(x)$ avec $g_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \geqslant 0$.

— la suite $\Big(g_n(x)\Big)_n$ est décroissante ;

— on a $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

La série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ est donc alternée et elle converge donc par le critère des séries alternées . On conclut : la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ CVS sur $\mathbb{R}$.

14.4. Convergence normale

La convergence normale pour les series de fonctions, que nous allons introduire, est l'analogue de la convergence absolue pour les séries numériques, la valeur absolue étant remplacée par la norme du sup :

***Définition 14.40* (Convergence normale).** — On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement (CVN) sur I si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge, où $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$.

Proposition 14.41. — *Si la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I alors, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in I$, donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I.*

Démonstration. — Soit $x \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge par hypothèse, on en déduit par comparaison que la série $\sum_{n\geqslant 0} |f_n(x)|$ converge, c'est à dire que $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ CVA. En conséquence $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge et, x étant choisi arbitrairement dans I, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge donc simplement sur I. □

Exemple 14.42. — On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^{3/2}}$. Montrons la convergence normale sur $\mathbb{R}$.

— Première méthode, par analyse des fonctions. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, posons : $g_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^{3/2}}$. On a $g_n'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+n^{3/2})^2}$. On en déduit le tableau de variations :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline g_n'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline & & & \frac{1}{n^{3/2}} & & \\ g_n(x) & & \nearrow & & \searrow & \\ & 0 & & & & 0 \end{array}$$

. On en déduit que $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = \frac{1}{n^{3/2}}$. Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge par le critère de Riemann. Aussi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement (donc simplement) sur $\mathbb{R}$.

— Deuxième méthode, par majoration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + n^{3/2} \geqslant n^{3/2}$ de sorte que $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Par suite $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$. On déduit du critère de Riemann que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge puis, par comparaison, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ converge. La série de fonctions

$\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est de ce fait normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc converge simplement sur $\mathbb{R}$, de somme $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^{3/2}}$.

Exemple 14.43. — On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ de terme général $f_n(x) = x^n$.

1. On se place sur $I =]-1,1[$. On a : $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in]-1,1[} |x^n| = 1$. Par suite la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ diverge vers $+\infty$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur I.
2. Soit $A \in]0,1[$. On se place sur $I = [-A, A]$. On a $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-A,A]} |x^n| = \sup_{x\in[0,A]} x^n = A^n$ par parité de $|x^n|$ puis par croissance de la fonction $x \in [0, A] \mapsto x^n$. Par suite la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\geqslant 0} A^n$ est une série géométrique de raison $0 < A < 1$, donc converge. En conclusion, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement (donc simplement) sur $[-A, A]$, pour tout $A \in]0,1[$. Ceci implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[= \bigcup_{A\in]0,1[} [-A, A]$.

Exemple 14.44. — On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ de terme général $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$. On a vu à l'exemple 14.39 qu'elle CVS sur $\mathbb{R}$. On veut analyser sa convergence normale. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et observons que $|f_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Par le critère de Riemann, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ ne converge pas absolument. Par suite la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement, sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$.

Les exemples précédents illustrent la méthode générale :

1. pour montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVN sur l'intervalle I, on cherche à majorer $|f_n(x)|$ sur I par une quantité $u_n \geqslant 0$ indépendante de x puis on montre que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. On conclut par comparaison.
2. si au contraire on veut montrer que la convergence n'est pas normale sur I, on minorera $\|f_n\|_\infty$ par une quantité $v_n \geqslant 0$ telle que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge vers $+\infty$.

14.5. Convergence uniforme

On a vu pour les suites de fonctions continues que la convergence simple était insuffisante pour assurer la continuité de la limite. Pour des raisons analogues, nous introduisons la notion de convergence uniforme pour les séries de fonctions :

***Définition 14.45* (Convergence uniforme).** — On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ définie sur l'intervalle I **converge uniformément** (CVU) sur I si la suite $\big(S_n\big)_{n\geqslant 0}$ de ses sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformément sur I : $\Big(\sum_{n\geqslant 0} f_n \; CVU \text{ sur } I \Leftrightarrow \big(S_n\big)_{n\geqslant 0} \; CVU \text{ sur } I\Big)$

Remarque 14.46. — La définition précédente s'écrit aussi de la manière suivante : $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si $\|S_n - S_p\|_\infty = \|\sum_{k=p+1}^{n} f_k\|_\infty \underset{n\geqslant p\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (Critère de Cauchy pour la suite $\big(S_n\big)$, cf. théorème 14.29).

Proposition 14.47 **(Convergence uniforme implique convergence simple)**
Si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I, alors elle converge simplement sur I vers la somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de la série.

Démonstration. — Supposons que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I, c'est à dire que la suite des sommes partielles $\big(S_n\big)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément. En particulier la suite $\big(S_n\big)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I (cf. proposition 14.18) et pour tout $x \in I$, $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, la somme de la série en x. □

La propriété suivante est souvent utile en pratique pour montrer la CVU d'une série de fonctions :

Proposition 14.48 **(Convergence normale implique convergence uniforme)**
Si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I vers la somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de la série.

Démonstration. — Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I, autrement dit la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge vers le réel $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. En notant $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty$ la suite des sommes partielles, on a donc $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par ce qui précède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $|\sigma_n - \sigma| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire : $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Pour $x \in I$ et pour $n \geqslant p \geqslant N$:

$$|S_n(x) - S_p(x)| = \left|\sum_{k=p+1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=p+1}^{n} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Comme x est arbitraire dans I, on obtient : $\|S_n - S_p\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant p \geqslant N$. Ceci montre que la suite des sommes partielles $\big(S_n\big)$ est de Cauchy, donc qu'elle converge uniformément sur I. Par suite, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur I. □

On vient de voir que CVN implique CVU. La réciproque est fausse ainsi que nous allons l'illustrer sur l'exemple 14.49.

Exemple 14.49. — On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ de terme général $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ sur $[0, +\infty[$. Analysons tout d'abord la convergence simple. On note que la série ne converge pas absolument puisque $\dfrac{1}{n+x} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente. On note cependant que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

— on a $f_n(x) = (-1)^n g_n(x)$ avec $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x} \geqslant 0$.
— la suite $\Big(g_n(x)\Big)_n$ est décroissante ;
— on a $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ CVS sur $[0, +\infty[$ par application du critère des séries alternées. Rappelons ici d'où vient ce critère. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0, +\infty[$, posons

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,,$$

la somme partielle d'ordre N.

Alors pour tout $p \in N^\star$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

1. $S_{2p+2}(x) - S_{2p}(x) = g_{2p+2}(x) - g_{2p+1}(x) \leqslant 0$, car la suite $\big(g_n(x)\big)_{n>0}$ est décroissante. Donc $S_{2p+2}(x) \leqslant S_{2p}(x)$ et la suite extraite $\big(S_{2p}(x)\big)_{p\geqslant 1}$ est donc décroissante.
2. $S_{2p+1}(x) - S_{2p-1}(x) = -g_{2p+1}(x) + g_{2p}(x) \geqslant 0$, de nouveau car la suite $\big(g_n(x)\big)_{n>0}$ est décroissante. Donc $S_{2p-1}(x) \leqslant S_{2p+1}(x)$ et la suite extraite $\big(S_{2p-1}(x)\big)_{p\geqslant 1}$ est donc croissante
3. $S_{2p}(x) - S_{2p+1}(x) = g_{2p+1}(x) \geqslant 0$ et on sait que $g_{2p+1}(x) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

En conséquence, les suites extraites $\big(S_{2p}(x)\big)_{p\geqslant 1}$ et $\big(S_{2p-1}(x)\big)_{p\geqslant 1}$ sont adjacentes et convergent donc vers une même limite $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, la somme de la série.
Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas absolument sur $[0, +\infty[$, elle ne peut pas converger normalement sur cet intervalle. Montrons cependant que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ CVU sur $[0, +\infty[$. Observons que, pour tout $p \geqslant 1$, et tout $x > 0$,

$$S_{2p+1}(x) \leqslant S(x) \leqslant S_{2p}(x)\,.$$

De plus, pour tout $x > 0$,

$$|S_{2p+1}(x) - S_{2p}(x)| = \frac{1}{2p+1+x} \leqslant \frac{1}{2p+1}\,.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$|S(x) - S_{2p+1}(x)| \leqslant \frac{1}{2p+1}\,, \quad |S(x) - S_{2p}(x)| \leqslant \frac{1}{2p+1}\,.$$

On en déduit que les suites $(S_{2p})_{p\geqslant 1}$ et $S_{2p+1}(x))_{p\geqslant 0}$ convergent uniformément vers S sur $[0, +\infty[$. Il en va donc de même pour $(S_n)_{n\geqslant 1}$. Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ CVU sur $[0, +\infty[$.

Donnons un autre critère de convergence uniforme basée sur la suite des restes :

Proposition 14.50. — *Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions. Elle converge uniformément sur l'intervalle I si et seulement si*

$$\begin{cases} \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \text{la suite } \big(R_n\big)_{n\geqslant 0} \text{ des restes converge uniformément vers } 0 \text{ sur } I \end{cases}$$

Démonstration. — On suppose

$$\begin{cases} \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \text{la suite } \big(R_n\big)_{n\geqslant 0} \text{ des restes converge uniformément vers } 0 \text{ sur } I \end{cases}.$$

En notant $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ la somme de la série, on observe que $R_n = S - S_n$. Par hypothèse, $\|S - S_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit $S_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} S$ sur I. Donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *CVU* sur I.
La preuve de la réciproque est laissée au lecteur. □

14.6. Convergence uniforme, continuité, intégration et dérivation

Des considérations précédentes on déduit divers résultats.

Théorème 14.51 **(Convergence uniforme des séries et continuité)**
Si la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur l'intervalle I et si les fonctions f_n sont continues sur I, alors la somme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est une fonction continue sur I.

Démonstration. — Les fonctions f_n sont continues sur I, donc les sommes partielles S_n le sont aussi. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur l'intervalle I équivaut à $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur I. On conclut par le théorème 14.21 de continuité pour les suites de fonctions. □

Exemple 14.52. — On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ de terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On observe :

1. les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$;
2. on a, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Par suite la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVN, donc CVU, sur $\mathbb{R}$ et la somme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 14.53 **(Convergence uniforme des séries et intégration)** *Si la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur le segment $[a,b]$ $(-\infty < a \leqslant b < +\infty)$ et si les fonctions f_n sont continues sur $[a,b]$, alors la somme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable sur $[a,b]$ et la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$.*

Démonstration. — Les fonctions f_n sont continues sur I, donc les sommes partielles S_n le sont aussi. En particulier S_n est intégrable sur le segment $[a,b]$. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur le segment I équivaut à $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $[a,b]$ et, par le théorème d'intégration 14.23 sur les suites :

$$\int_a^b S_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(x)dx\,.$$

Or, on a

$$\int_a^b S_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)\,.$$

On peut donc conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$. □

Remarque 14.54. — On écrit souvent le théorème 14.53 en disant qu'on peut intervertir les signes de sommation :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)\,.$$

Exemple 14.55. — On reprend l'exemple 14.52 avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On a vu que que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur $\mathbb{R}$, de somme la fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $A > 0$. Par le théorème 14.53 appliqué au segment $[0,A]$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_0^A f_n(x)dx\right)$ converge et $\int_0^A f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^A f_n(x)dx\right)$.
Explicitons les intégrales : on a $\int_0^A f_0(x)dx = \int_0^A e^{-x}dx = 1 - e^{-A}$. Par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\int_0^A f_n(x)dx = \int_0^A \frac{1}{n^2+e^x}dx = \int_0^A \frac{1}{e^x(e^{-x}n^2+1)}dx = \int_0^A \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}n^2+1}.$$

Considérons le changement de variable $u = e^{-x}$ de sorte que $du = -e^{-x}dx$:

$$\int_0^A f_n(x)dx = -\int_1^{e^{-A}} \frac{1}{un^2+1}du = -\left[\frac{\ln(1+un^2)}{n^2}\right]_1^{e^{-A}} = \frac{\ln(1+n^2) - \ln(1+n^2e^{-A})}{n^2}.$$

En conclusion : $\int_0^A f(x)dx = (1-e^{-A}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(1+n^2)-\ln(1+n^2e^{-A})}{n^2}\right)$.

On considère à présent la dérivation :

***Théorème 14.56* (Convergence uniforme des séries et dérivation)**
Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. On suppose :

1. *$\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ CVU sur $[a,b]$ vers la fonction $g = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$;*
2. *il existe $c \in [a,b]$ tel que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(c)$ converge.*

Alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur $[a,b]$, sa somme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f' = g$.

Démonstration. — Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. On note que la suite $(S_n(c))$ converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (comme somme finie de telles fonctions) et par hypothèse, $S_n' = \sum_{k=0}^{n} f_k' \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} g$ sur $[a,b]$. Par le théorème 14.25 de dérivation des suites de fonctions, $S_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f$ sur $[a,b]$ où $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ dont la dérivée est g. □

Exemple 14.57. — On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ de terme général $f_n(x) = \frac{\ln(1+n^2e^{-x})}{n^2}$. Les fonctions f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = \frac{-n^2e^{-x}}{n^2(1+n^2e^{-x})} = -\frac{1}{e^x+n^2}$. On observe que :

1. la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ *CVU* sur $\mathbb{R}$. (Cf. exemple 14.52).
2. la série de termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} f_n(0) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\ln(1+n^2)}{n^2}$ converge car $\frac{\ln(1+n^2)}{n^2} = \underset{n\to\infty}{o}(n^{-3/2})$ et $\sum_{n\geqslant 1} n^{-3/2}$ est une série de Riemann convergente (cf. exemple 14.52)..

On en déduit que pour tout $A > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *CVU* sur le segment $[-A,A]$, sa somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-A,A]$ et $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.
Comme $A > 0$ peut être choisi arbitrairement grand, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *CVS* sur $\mathbb{R}$, que sa somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

14.7. Exercices

Exercice 261

Pour chacune des séries de fonctions de terme général f_n suivant, analyser la convergence simple et absolue sur l'intervalle indiqué.

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{\cosh(nx)}$, $x \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$. (Rappel : $\cosh(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$).
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n(|x-n|+1)}$, $x \in \mathbb{R}$, $n > 0$.
3. $f_n(x) = (-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n > 0$.
4. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$, $x \in \mathbb{R}$, $n > 0$, $\alpha > 0$.
5. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$, $x \in [a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, $n > 0$, $\alpha > 0$.

14.7.1. Séries de fonctions, convergence normale. —

Exercice 262

Analyser la convergence normale des suites de fonctions données dans l'exercice précédent.

Exercice 263

On considère la série de fonctions de terme général $f_n = x(1-x^2)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'elle converge simplement sur $[-1,1]$ et calculer sa somme.
2. La convergence est-elle normale ?

Exercice 264

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+xn^2}$.

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement.

14.7.2. Séries de fonctions, convergence uniforme. —

Exercice 265

On considère la série de fonctions $\sum_{n>0} f_n$ de terme général $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n>0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $n > 0$, on note R_n le reste d'ordre n de la série : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1+x^2}$.
3. Montrer que la série $\sum_{n>0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 266

On considère la série de fonctions $\sum_{n>0} f_n$ de terme général $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in [-1,1]$.

1. Montrer que $\sum_{n>0} f_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$.
   Calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sur $[-1,1]$.
2. Montrer que $\sum_{n>0} f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ mais pas sur $[-1,1]$.

14.7.3. Séries de fonctions - Convergence uniforme, continuité, intégration et dérivation. —

Exercice 267

Pour $n \geqslant 1$, on note u_n la fonction définie sur $[0,1]$ par : $u_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ x^{2n}\ln(x) \text{ sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que u_n est continue sur $[0,1]$ pour tout $n > 0$. Est-elle dérivable ?
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
3. Calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de cette série puis étudier la continuité de S.
4. Montrer que pour tout $0 < a < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,a]$.

5. Analyser la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[0,1]$.

Exercice 268

Pour $n \geqslant 0$ et $x \in]1,+\infty[$ on pose :En espérant que la grève aura pris fin d'ici là... $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.
   On note $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ la somme de la série sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout $a > 1$, la fonction f est continue sur $[a,+\infty[$. La fonction f est-elle continue sur $]1,+\infty[$?
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.
4. Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.
5. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

Exercice 269

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\int_0^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et expliciter sa dérivée f' à l'aide d'une série de fonctions.

Exercice 270

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ où $g_n(x) = nx^n$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. On note g la somme de la série sur $]-1,1[$: $g : x \in]-1,1[\mapsto g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,0]$.
4. Montrer que g est continue sur $]-1,1[$.
5. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{n}{n+1}x^{n+1}$. Déduire des questions précédentes que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers la fonction f définie par : $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

CHAPITRE 15

SÉRIES ENTIÈRES

Nous abordons dans ce chapitre la notion de séries entières. A l'issue de ce chapitre, l'étudiant sera en capacité : de définir et de calculer le rayon de convergence d'une série entière par divers arguments dont les règles de d'Alembert et de Cauchy ; de définir et d'analyser la convergence simple, absolue et normale d'une série entière sur un disque ; de définir l'addition, le produit et la dérivée des séries entières, d'estimer leurs rayons de convergence.

15.1. Préambule

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux séries de fonctions de la forme $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, de terme général $f_n(x) = a_n x^n$ où (a_n) est une suite de nombre réels ou complexes. Ces séries, dites "entières", généralisent en quelque sorte les polynômes. Nous allons débuter ce chapitre par un exemple introductif puis nous complèterons ce préambule par quelques définitions utiles pour la suite.

15.1.1. Un exemple introductif. — Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à la convergence simple de cette série.

1. Considérons le cas $x = 0$. On a $f_0(0) = 1$ (on rappelle que $x^0 = 1$ pour tout x) tandis que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(0)$ converge vers 1.
2. Considérons le cas $x \neq 0$. Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument en utilisant le critère de d'Alembert. Observons que $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. Ceci implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |f_n(x)|$ converge.
   En conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument, donc simplement.

Ce qui précède montre que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}$ vers $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Peut-on préciser qui est la somme f ? Si on se rappelle les DL, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Il est de ce fait tentant de conjecturer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ CVS vers la fonction e^x, au moins pour x voisin de zéro. De fait on a le résultat suivant, que nous admettrons (on le démontrera au chapitre suivant - exemple 15.51) :

Proposition 15.1. — *La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction e^x. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.*

En conclusion de cet exemple, notre but dans ce chapitre sera de préciser les propriétés générales des séries entières. Au chapitre suivant, nous ferons le lien entre ces séries entières et les fonctions que vous connaissez.

15.1.2. Disques ouverts et fermés de $\mathbb{C}$. — Comme nous allons le voir, le cadre naturel des séries entières est l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et non pas $\mathbb{R}$. Nous utiliserons les notions et notations suivantes :

***Définition 15.2* (Disques ouverts et fermés).** —
1. On note $D(0, R)$ le **disque ouvert** de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon $R \geqslant 0$, défini par : $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Par extension, $\mathbb{C} = D(0, \infty)$ est le disque de rayon $R = \infty$.
2. On note $\overline{D(0, R)}$ le **disque fermé** de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon $R \geqslant 0$, défini par : $\overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$.

Les disques ouverts $D(0, R)$ et fermés $\overline{D(0, R)}$ sont les analogues dans $\mathbb{C}$ des intervalles ouverts $] - R, R[$ et fermés $[-R, R]$ de $\mathbb{R}$. On notera que $D(0, 0) = \emptyset$ (l'ensemble vide).

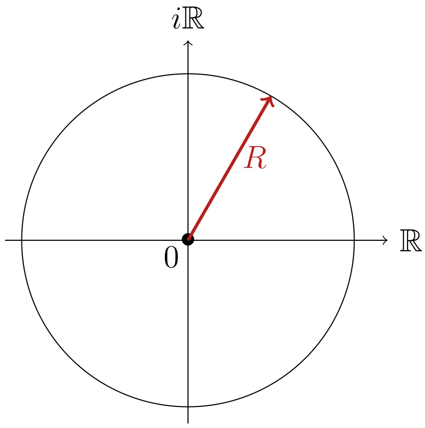


FIGURE 1. Le disque ouvert $D(0, R) \subset \mathbb{C}$ ne contient pas le cercle de rayon R. Le disque fermé $\overline{D(0, R)} \subset \mathbb{C}$ contient ce cercle.

15.2. Séries entières

***Définition 15.3* (Séries entières).** — On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes.

Exemple 15.4. — Les séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ ou encore $\sum_{n\geqslant 1}(1 + i)^n z^n$ sont des exemples de séries entières.

15.2.1. Convergence simple et absolue. — Les notions de convergence simple et absolue sont similaires au cadre réel :

***Définition 15.5* (Série entière simplement ou absolument convergente)**

On dit que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **converge simplement** (CVS) en $z_0 \in \mathbb{C}$ si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge, auquel cas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}$ est sa somme. On dit que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ **converge absolument** (CVA) en $z_0 \in \mathbb{C}$ si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z_0^n|$ converge (où naturellement $|.|$ désigne le module). Soit $R \geqslant 0$. On dit que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ CVS (resp. CVA) sur $D(0, R)$ (resp. $\overline{D(0, R)}$) si elle converge (resp. CVA) en tout point de $D(0, R)$ (resp. $\overline{D(0, R)}$).

Exemple 15.6. — On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$. Elle converge simplement sur $\mathbb{C}=D(0,\infty)$. Soit en effet $z_0\in\mathbb{C}$ et considérons la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{|z_0|^n}{n!}$. Cette série numérique converge, comme on le voit en lui appliquant le critère de d'Alembert pour $z_0 \neq 0$ (le résultat est évident si $z_0 = 0$) : $\dfrac{\dfrac{|z_0|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|z_0|^n}{n!}} = \dfrac{|z_0|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. Ceci montre que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ converge absolument, donc simplement, sur $\mathbb{C}$.

Remarque 15.7. — On a vu en introduction §15.1.1 que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Le résultat de l'exemple 15.6 permet de prolonger la fonction exponentielle au plan complexe, en posant : pour tout $z\in\mathbb{C}$, $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$: c'est **l'exponentielle complexe**.

15.2.2. Convergence normale. — On définit la convergence normale des séries entières de manière analogue au cadre réel :

Définition 15.8 **(Série entière normalement convergente)**
On dit que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ **converge normalement** (CVN) sur le disque fermé $\overline{D(0,R)}$ ($R>0$) si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\|a_nz^n\|_\infty$ converge, où : $\|a_nz^n\|_\infty=\sup_{z\in\overline{D(0,R)}}|a_nz^n|=\sup_{z\in\overline{D(0,R)}}|a_n|\times|z|^n$.

Proposition 15.9. — *1. $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ CVN sur $\overline{D(0,R)}$ $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|R^n$ converge.*

2. $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ CVN sur $\overline{D(0,R)}$ $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ CVA sur $\overline{D(0,R)}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ CVS sur $\overline{D(0,R)}$.

Démonstration. — 1. Pour tout $z\in\overline{D(0,R)}$, $|a_nz^n|\leqslant|a_n|R^n$ et par ailleurs $|a_nz^n|=|a_n|R^n$ si $|z|=R$. Donc $\sup_{z\in\overline{D(0,R)}}|a_nz^n|=|a_n|R^n$.

2. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ CVN sur $\overline{D(0,R)}$. Donc $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|R^n$ converge. Or pour tout $z\in\overline{D(0,R)}$, $|a_nz^n|\leqslant|a_n|R^n$. Par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ converge donc absolument, donc simplement, sur $\overline{D(0,R)}$.
Supposons à présent que $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ CVA sur $\overline{D(0,R)}$. En particulier $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|R^n$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ CVN sur $\overline{D(0,R)}$.

□

Exemple 15.10. — Pour tout $R>0$, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ CVN sur $\overline{D(0,R)}$. En effet, pour tout $R>0$, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{R^n}{n!}$ converge (appliquer la règle de d'Alembert) et on peut appliquer la proposition 15.9.
En conséquence, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ CVA sur $\overline{D(0,R)}$, pour tout $R>0$. Donc $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ CVA sur $\mathbb{C}=\bigcup_{R>0}\overline{D(0,R)}$ (la réunion de tous les disques $\overline{D(0,R)}$), ce qu'on savait déjà.

15.3. Rayon de convergence

Afin d'introduire la notion de rayon de convergence, nous débutons par le lemme d'Abel[(1)] :

1. Niels Henrik Abel (1802-1829), mathématicien norvégien.

***Lemme 15.11* (Lemme d'Abel).** — *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière et $R > 0$. Si la suite $\big(|a_n|R^n\big)$ est majorée, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ CVN sur $\overline{D(0,r)}$ pour tout $0 < r < R$. En particulier la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$.*

Démonstration. — Soit $r \in]0, R[$. On observe que $|a_n|r^n = |a_n|\left(\frac{r}{R}\right)^n R^n$. Par hypothèse, il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|R^n \leqslant M$. Ainsi $|a_n|r^n \leqslant M\left(\frac{r}{R}\right)^n$ et $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison $0 < \dfrac{r}{R} < 1$, donc convergente. Ceci montre, par comparaison et via la proposition 15.9, que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ CVN sur $\overline{D(0,r)}$. □

Exemple 15.12. — Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes telle que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n 2^n$ converge. Son terme général $a_n 2^n$ tend donc vers 0 quand $n \to \infty$: $a_n 2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier la suite $(|a_n|2^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée (toute suite convergente est bornée). On déduit du lemme d'Abel que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ CVN sur $\overline{D(0,r)}$ pour tout $0 < r < 2$. En particulier la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$.

Théorème 15.13. — *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe un réel $R \geqslant 0$, éventuellement $R = +\infty$, tel que les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$.*
2. *$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$.*

De plus $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,r)}$ pour tout réel $r > 0$ tel que $0 < r < R$.

Démonstration. — On pose $\mathscr{M} = \big\{r \geqslant 0 \mid \text{ la suite } \big(|a_n|r^n\big) \text{ est bornée}\big\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}$, non vide puisque contient $r = 0$. Elle admet donc une borne supérieure $R = \sup \mathscr{M}$ (on a $\mathscr{M} = [0, R]$ ou $\mathscr{M} = [0, R[$ si $\mathscr{M}$ est majorée, sinon $\mathscr{M} = [0, +\infty[$ et on pose $R = +\infty$).

1. Cas $R = +\infty$. Dans ce cas, le lemme d'Abel 15.11 montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ CVN sur les disques $\overline{D(0,r)}$, pour tout $r > 0$. En conséquence, la série converge absolument sur $\mathbb{C}$.
2. Cas $R < +\infty$. Soit $r < R$. Le lemme d'Abel 15.11 montre que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ CVN sur $\overline{D(0,r)}$.
   Soit $z \in D(0,R)$ fixé. Comme $R = \sup \mathscr{M}$, il existe $r > 0$ tel que $|z| < r < R$. Par conséquent, la série $|a_n z^n| \leqslant |a_n|r^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|r^n$ converge. Par suite $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument sur $D(0,R) = \bigcup_{0<r<R} \overline{D(0,r)}$.
   Enfin si $|z| > R$, la suite $\big(|a_n| \times |z|^n\big)$ n'est pas bornée, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement. (Rappelons qu'une condition nécessaire de convergence d'une série numérique $\sum_n u_n$ est que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier $(|u_n|)_n)$ doit être bornée).

□

Le théorème 15.13 justifie la définition suivante :

***Définition 15.14* (Rayon de convergence).** — Dans le théorème 15.13, $R \in [0, +\infty]$ s'appelle le **rayon de convergence** de la série entière et $D(0,R)$ est son **disque de convergence**.

Remarque 15.15. — Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Insistons sur deux points :

1. on ne sait rien dire en général sur le comportement de la série quand $|z| = R$;
2. en particulier, le fait que $\underline{\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n}$ CVN sur les disques $\overline{D(0,r)}$ avec $r < R$ n'implique pas CVN sur $\overline{D(0,R)}$.

Exemple 15.16. — Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$. En effet, on a vu que cette série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exemple 15.17. — Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$ est $R = 1$. En effet soit $z \in \mathbb{C}^\star$ et $r = |z| > 0$. Analysons la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} nr^n$ par le critère de d'Alembert. On a $\dfrac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \dfrac{n+1}{n} r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r$. En conséquence :

1. si $r < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} nr^n$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$ CVA pour $|z| < 1$. Par suite, $R \geqslant 1$.
2. si $r > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} nr^n$ diverge grossièrement. Donc $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$ diverge grossièrement si $|z| > 1$. Par suite $R \leqslant 1$.

Par suite $R = 1$. En particulier, la série $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$ converge normalement sur le domaine $|z| \leqslant r$ pour tout $r < 1$.
On notera que $\sum_{n\geqslant 0} n$ diverge grossièrement, donc que $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$ diverge pour $z = 1$. Cette constation aurait suffit pour montrer que $R \leqslant 1$.

Exemple 15.18. — Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ est $R = 1$.

En effet soit $z \in \mathbb{C}^\star$ et $r = |z| > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{\frac{r^{n+1}}{n+1}}{\frac{r^n}{n}} = \dfrac{n}{n+1} r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r$. Par le critère de d'Alembert :

1. si $r < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n}{n}$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ CVA si $|z| < 1$ et par suite $R \geqslant 1$.
2. si $r > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n}{n}$ diverge grossièrement, donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ diverge grossièrement si $|z| > 1$. Par suite $R \leqslant 1$.

En conclusion $R = 1$. Sur le bord du disque de convergence $D(0,1)$, on notera que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ diverge pour $z = 1$ (la série dite harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est de Riemann divergente) : cette observation aurait suffit pour conclure que $R \leqslant 1$.
Observons cependant que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = -1$ (la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée convergente).

Exemple 15.19. — Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+in} z^n$ (où $i^2 = -1$) est $R = 1$. En effet :

1. cette série converge absolument si $|z| = 1$. En effet $\frac{1}{|n^2+in|} = \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Remarquez que cela suffit pour conclure que la série CVA sur le disque $\overline{D(0,1)}$ (puisque $\frac{|z|^n}{|n^2+in|} \leqslant \frac{1}{|n^2+in|}$ si $|z| \leqslant 1$). Ainsi $R \geqslant 1$.
2. si $|z| > 1$, alors $\frac{|z|^n}{|n^2+in|} = \frac{e^{n\ln(|z|)}}{\sqrt{n^4+n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la série diverge grossièrement. Par suite $R \leqslant 1$.

Dans les exemples précédents, on a souvent utilisé le critère de d'Alembert pour calculer le rayon de convergence. Ce critère fournit un moyen pratique de calcul du rayon de convergence dans une majorité de cas par le résultat suivant :

Proposition 15.20 **(Règle de d'Alembert pour les séries entières)**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière. S'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$\begin{cases} \forall n \geqslant N, a_n \neq 0 \\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, +\infty] \end{cases}$$

alors le rayon de convergence R *de la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *est* $R = \dfrac{1}{\ell}$ *avec la convention :* $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ *et* $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

Démonstration. — Pour $r > 0$ et $n \geqslant N$, $\frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell r$.
Si $r < \frac{1}{\ell}$ alors $\ell r < 1$ et la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ converge par le critère de d'Alembert. Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ CVN sur $\overline{D(0, r)}$.
Si $|z| > \frac{1}{\ell}$ alors $\frac{|a_{n+1}||z|^{n+1}}{|a_n||z|^n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell|z| > 1$ et la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement, de nouveau par le critère de d'Alembert. □

Vous connaissez également le critère de Cauchy pour les séries numériques. Appliqué aux séries entières, il donne :

Proposition 15.21 **(Règle de Cauchy pour les séries entières)**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière. Si* $\sqrt[n]{|a_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, +\infty]$ *alors le rayon de convergence* R *de la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *est* $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration. — Reprendre point par point la preuve faite pour la règle de d'Alembert. □

Exemple 15.22. — On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ avec $a_n = \dfrac{\ln(n)}{2^n}$. Pour $n \geqslant 2$ on a $a_n \neq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} \frac{2^n}{\ln(n)} = \frac{1}{2}\frac{\ln(n) + \ln(1 + 1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Par application de la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série est $R = 2$.

Exemple 15.23. — On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n} z^{2n} = \sum_{p\geqslant 1} a_p z^p$ avec $\begin{cases} a_p = \dfrac{\ln(n)}{2^n} \text{ si } p = 2n,\ n \in \mathbb{N} \\ a_p = 0 \text{ si } p = 2n+1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$. On ne peut donc pas appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières. On va en revanche appliquer cette règle pour les séries numériques. Soit $r > 0$ et considérons la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n = \dfrac{\ln(n)}{2^n} r^{2n} \geqslant 0$. Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^{2n+2}\ln(n+1)}{2^{n+1}} \frac{2^n}{r^{2n}\ln(n)} = r^2 \frac{\ln(n+1)}{2\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{r^2}{2}.$$

On a $\begin{cases} \frac{r^2}{2} < 1 \\ r > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < r < \sqrt{2}$. En conséquence, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n} r^{2n}$ si $r < \sqrt{2}$ et diverge grossièrement si $r > \sqrt{2}$. Par suite, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n} z^{2n}$ est $R = \sqrt{2}$.

15.4. Opération dans l'algèbre des séries entières

Définition 15.24. — L'espace des séries entières à coefficients complexes (resp. réels) est noté $\mathbb{C}[[z]]$ (resp. $\mathbb{R}[[z]]$).
Le sous-espace des séries entières à coefficients complexes (resp. réels) de rayon de convergence strictement positif est noté $\mathbb{C}\{z\}$ (resp. $\mathbb{R}\{z\}$).

On peut définir des structures algébriques sur ces espaces de séries entières. Ainsi :

***Définition 15.25* (Multiplication par un scalaire).** — La multiplication d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ (resp. $\in \mathbb{R}[[z]]$) par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ (resp. $\in \mathbb{R}$) est la série entière $\lambda\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)$ définie par $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$.

Il est trivial de constater que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, la série $\lambda\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)$ a même rayon de convergence que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Interessons-nous maintenant à l'addition, qu'on définit naturellement :

***Définition 15.26* (Addition de séries entières).** — L'addition $\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\right)$ des deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ appartenant à $\mathbb{C}[[z]]$ (resp. $\mathbb{R}[[z]]$) est la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n) z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ (resp. $\in \mathbb{R}[[z]]$).

Proposition 15.27. — *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 respectivement. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n) z^n$ vérifie :*

1. *de manière générale $R \geqslant \min(R_1, R_2)$;*
2. *si $R_1 \neq R_2$, alors $R = \min(R_1, R_2)$.*

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_1, R_2)$, on a : $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) z^n$.

Démonstration. — On va supposer $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ (sinon $\min(R_1, R_2) = 0$ et naturellement $R \geqslant \min(R_1, R_2)$!).

1. Soit $r \leqslant \min(R_1, R_2)$. Alors $|a_n + b_n| r^n \leqslant |a_n| r^n + |b_n| r^n$. Or $|a_n| r^n$ et $|b_n| r^n$ sont les termes généraux de deux séries convergentes, donc la série de terme général $|a_n| r^n + |b_n| r^n$ converge. Par comparaison on a donc $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n) z^n$ CVN sur $\overline{D(0, r)}$. Par suite $R \geqslant \min(R_1, R_2)$.
2. Supposons, par exemple, que $R_1 < R_2$ (donc $R \geqslant R_1$ par ce qui précéde). Soit $R_1 < r < R_2$. Alors $|b_n| r^n$ est le terme général d'une série convergente donc $|b_n| r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tandis que la suite $(|a_n| r^n)$ est non majorée. Comme $\big||a_n| - |b_n|\big| r^n \leqslant |a_n + b_n| r^n$, on voit que la suite $(|a_n + b_n| r^n)$ est non majorée. En conséquence la suite $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n) z^n$ diverge grossièrement pour $|z| > R_1$, donc $R \leqslant R_1$. En conclusion $R = R_1$.
   Enfin, si $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ et $T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sont les sommes partielles d'ordre n des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ respectivement, on voit que $(S_n + T_n)(z) = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) z^k$ est la somme partielle d'ordre n de $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) z^n$. Comme pour $|z| < \min(R_1, R_2)$ on a $S_n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $T_n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on voit que $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) z^n$.

□

Nous passons maintenant au produit de séries entières. Pour introduire ce produit, observons le développement du produit de deux polynômes de même degré M :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{p=0}^{M} a_p z^p\right)\left(\sum_{q=0}^{M} b_q z^q\right) &= \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M} a_p b_q z^{p+q} \\ &= \sum_{n=0}^{2M}\left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) z^n \quad \text{(on a posé } p+q=n\text{)}\end{aligned}$$

En faisant formellement tendre M vers l'infini, cela donne la définition suivante :

***Définition 15.28* (Produit de séries entières).** — Le produit $\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\right)$ des deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de $\mathbb{C}[[z]]$ (resp. $\mathbb{R}[[z]]$) est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ (resp. $\in \mathbb{R}[[z]]$) où $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$.

Remarque 15.29. — Le produit que nous venons de définir est aussi appelé "produit de Cauchy". On signale le résultat suivant : on suppose que les series numériques $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ CVA. Alors la série de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge absolument et $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (où $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$).

Exemple 15.30. — Soit $S_1(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n+1}$ ($a_n = \dfrac{1}{n+1}$) et $S_2(z) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)z^n$ ($b_n = n+1$). On a :

$$\begin{aligned} S_1(z)S_2(z) &= \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\right) \\ &= \frac{1}{1}\times 1 + \left(\frac{1}{1}\times 2 + \frac{1}{2}\times 1\right) z + \left(\frac{1}{1}\times 3 + \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{3}\times 1\right) z^2 + \cdots \\ &= \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \text{ avec } c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n-p+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Proposition 15.31. — *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 respectivement. Alors le rayon de convergence R de la série entière produit vérifie : $R \geqslant \min(R_1, R_2)$.*
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_1, R_2)$, on a : $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Démonstration. — Soit $r < \min(R_1, R_2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ vérifie :

$$|c_n| \leqslant |a_0||b_n| + |a_1||b_{n-1}| + \cdots + |a_n||b_0|$$

et par suite :

$$\begin{aligned}|c_n| r^n &\leqslant |a_0|(|b_n| r^n) + (|a_1| r)(|b_{n-1}| r^{n-1}) + \cdots + (|a_n| r^n)|b_0| \\ &\leqslant \sup_{0\leqslant k\leqslant n}\left\{|a_k| r^k\right\}\left(\sum_{k=0}^{n} |b_k| r^k\right).\end{aligned}$$

Observons que comme $r < R_1$, la suite $\left(|a_k| r^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée. Par ailleurs comme $r < R_2$, la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} |b_k| r^n$ converge. Il vient : $|c_n| r^n \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{|a_k| r^k\right\}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k\right)$, c'est à dire que la suite $\left(|c_n| r^n\right)_n$ est majorée. Par le lemme d'Abel 15.11 la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ CVN sur $\overline{D(0, r')}$ pour tout $0 < r' < r$, donc pour tout $0 < r' < \min(R_1, R_2)$. Ceci montre que le rayon de convergence R de la série produit $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ vérifie : $R \geqslant \min(R_1, R_2)$.

Soit par ailleurs $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ et $T_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ les sommes partielles d'ordre n des séries respectives $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$. On a pour $|z| < \min(R_1, R_2)$:

$$S_n(z)T_n(z) = \left(\sum_{p=0}^n a_p z^p\right)\left(\sum_{q=0}^n b_q z^q\right) = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{p=0}^k a_p b_{k-p}\right) z^k = \sum_{k=0}^{2n} c_k z^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

□

Remarque 15.32. — Quand on le muni des opérations $(+, \times, .)$ (addition, multiplication et multiplication par un scalaire), l'espace $\mathbb{C}[[z]]$ (resp. $\mathbb{R}[[z]]$) est ce qu'on appelle une **algèbre**. Il en va de même du sous-espace $\mathbb{C}\{z\}$ (resp. $\mathbb{R}\{z\}$), comme conséquence des propriétés que nous venons de voir.

15.5. Dérivée formelle

La dérivée formelle d'une série entière s'obtient en dérivant chaque terme de la série par la règle usuelle. Plus exactement :

***Définition 15.33* (Dérivée formelle).** — La **dérivée formelle** $\partial\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est la série $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.

Théorème 15.34. — *Le rayon de convergence R' de la dérivée formelle d'une série entière est égal au rayon de convergence R de cette même série : $R' = R$.*

Démonstration. — Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et R' celui de sa dérivée formelle $\partial\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$.
Si $|z| > R$, on sait que la suite $\left(|a_n z^n|\right)_{n\geqslant 0}$ est non majorée. Mais alors $|n a_n z^{n-1}| = \frac{n}{|z|}|a_n z^n|$ est le terme général d'une suite non bornée également. Donc $R' \leqslant R$. En particulier si $R = 0$ alors $R' = 0$. On va donc supposer $R > 0$ ci-après.
Soit à présent $0 < r < R$. La suite $\left(|a_n| r^n\right)_{n\geqslant 0}$ est majorée, disons par $M > 0$. Soit $0 < r' < r$ et écrivons :

$$n|a_n|(r')^{n-1} = \frac{n}{r}|a_n| r^n \left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} \leqslant M\frac{n}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1}.$$

Montrons, par la règle de d'Alembert, que $\frac{n}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une série convergente. On a en effet :

$$\frac{n+1}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n} \times \frac{r}{n}\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n}\frac{r'}{r} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{r'}{r} < 1.$$

Par comparaison on déduit que la série dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ CVN sur $\overline{D(0, r')}$, pour tout $r' < R$. Donc $R' \geqslant R$. □

15.6. Exercices

15.6.1. Convergence simple et absolue. —

Exercice 271

Pour chacune des séries entières $\sum a_n z^n$ suivantes :

— montrer qu'elle converge simplement sur le disque ouvert $D(0, R)$,

— montrer qu'elle diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$.

— dire (en le justifiant) si la série converge simplement sur le disque fermé $\overline{D(0, R)}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n(n+1)$ et $R = \dfrac{1}{2}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}$ et $R = 1$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n\sqrt{2n}$ et $R = 1$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $R = 1$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \dfrac{(3i)^n}{n}$ et $R = \dfrac{1}{3}$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \ln(2n)$ et $R = 1$.

Exercice 272

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes et $z_0 \in \mathbb{C}^\star$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vérifie $R \geqslant |z_0|$.

Exercice 273

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n(-6)^n$ converge. On prétend qu'alors :

1. le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vérifie $R = 6$.
2. la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,6)}$.

Ces affirmations sont-elles toujours vraies ?

Exercice 274

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes telle que :

$$\begin{cases} \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} a_n 2^n \text{ converge,} \\ \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} a_n(-7)^n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On prétend qu'alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vérifie $2 \leqslant R < 7$. Cette affirmation est-elle toujours vraie ?

Exercice 275

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Calculer en fonction de R le rayon de convergence R_i des séries entières S_i suivantes.

1. $S_1 = \sum_{n\geqslant 0} n^2 a_n z^n$, de rayon de convergence R_1.
2. $S_2 = \sum_{n\geqslant 0} 2^n a_n z^n$, de rayon de convergence R_2.
3. $S_3 = \sum_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$, de rayon de convergence R_3.
4. $S_4 = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$, de rayon de convergence R_4.
5. $S_5 = \sum_{n\geqslant 0} n^2 a_n^2 z^{2n}$, de rayon de convergence R_5.

15.6.2. Règle de d'Alembert et de Cauchy. —
Exercice 276

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants.

1. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2+4n-1}{n+4}$, $n \geqslant 0$.
2. $a_n = n(n-1)\cdots(n-p)$ pour $n > p$ et $p \in \mathbb{N}^\star$ fixé.
3. $a_n = \dfrac{1}{(\alpha n+1)^\alpha}$, $n \geqslant 0$, avec $\alpha > 0$ fixé.

4. $a_n = \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^n$, $n \geqslant 1$, $a, b > 0$.
5. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $n \geqslant 1$.
6. $a_n = e^{i\alpha n}$, $n \geqslant 0$ avec $\alpha > 0$ fixé.

Exercice 277

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants.

1. $a_n = (2n)^n$, $n \geqslant 1$.
2. $a_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$, $n \geqslant 1$.
3. $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $n \geqslant 1$.
4. $a_n = \dfrac{(2n)^2}{n!}$, $n \geqslant 1$.
5. $a_n = \dfrac{2^n}{(2n)!}$, $n \geqslant 1$.

Exercice 278

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^n z^{2^n}$. (Cette série fait partie des séries dites "lacunaires").

15.6.3. Opérations sur les séries entières. —

Exercice 279

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n} z^n$.
2. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 3^n z^n$.
3. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \big(2^{-n} - 3^n\big) z^n$.

Exercice 280

Soient A_1 et A_2 les séries entières définies par $A_1 = \sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $A_2 = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n z^n$ respectivement.

1. Calculer la série entière produit $A_{12} = A_1 A_2$.
2. Calculer le rayon de convergence des séries A_1, A_2 et A_{12}, puis calculer les sommes S_1, S_2 et S_{12} de ces séries pour z appartenant à leur domaine de convergence respectif. Comparer ces sommes.
3. Calculer la série entière A_1^2 ainsi que la série entière dérivée formelle ∂A_1, et préciser leur rayon de convergence respectif. Que constatez-vous ?

Exercice 281

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et soit R_b le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.

1. En considérant la série produit de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et de $\sum_{n\geqslant 0} z^n$, montrer l'inégalité : $\min(1, R_a) \leqslant R_b \leqslant R_a$.
2. Etudier les exemples suivants :

1. $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$;
2. $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ et $a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

15.7. Fonctions développables en série entière

Cette dernière section est consacrée à la notion de fonctions développables en séries entières. A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera en capacité : de définir le développement en série entière de fonctions classiques ; de montrer qu'une fonction est développable ou non développable en série entière ; de faire le lien entre le développement en série entière et les développements limités et de Taylor ; d'appliquer les règles de dérivation et de primitivation sur les développements en série entière, en particulier dans le cadre des équations différentielles.

15.7.1. Fonctions développables en série entière. — Dans tout ce chapitre, les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ considérées sont à coefficients réels $a_n \in \mathbb{R}$.

Définition 15.35 **(Fonction développable en série entière à l'origine)**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $J =]-r, r[\subset I$ pour un certain $r > 0$. On dit que f est **développable en série entière en** 0 **sur** J (notation : DSE(0) sur J) s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathbb{R}[[z]]$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in J, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On dira alors que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est le développement en série entière de f en 0 sur J (notation : DSE(0) sur J). On dira que f est **développable en série entière en** 0 s'il existe $r > 0$ tel que f est DSE(0) sur $J =]-r, r[$.

Exemple 15.36. — On a vu à la Proposition 15.1 que la fonction $f(x) = e^x$ est développable en série entière en 0 et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exemple 15.37. — La série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ a comme rayon de convergence $R = 1$ (comme on le voit par la règle de d'Alembert, par exemple). Par ailleurs par une formule bien connue : pour tout $z \in D(0,1)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Par suite, $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En d'autres termes, pour tout $z \in D(0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Ceci montre que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ est DSE(0) sur $]-1, 1[$ et que : $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
On remarquera sur cet exemple que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mais qu'elle n'est DSE(0) que sur $]-1, 1[$.

On peut définir le développement en série entière en d'autres points que 0 :

Définition 15.38 **(Fonction développable en série entière en un point)**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ tel que $J =]-r + x_0, x_0 + r[\subset I$ pour un certain $r > 0$. On dit que f est **développable en série entière en** x_0 **sur** J (notation : DSE(x_0)) sur J) s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathbb{R}[[z]]$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in J, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

On dira que f est **développable en série entière en** x_0 s'il existe $r > 0$ tel que f est DSE(x_0) sur $J =]-r+x_0, x_0+r[$.

Remarque 15.39. — De manière équivalente, la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est DSE(x_0) sur $J =]-r+x_0, x_0+r[$ si et seulement si la fonction $g : x \in]-r, r[\mapsto g(x) = f(x+x_0)$ est DSE(0) en 0 sur $]-r, r[$.

Exemple 15.40. — On considère la fonction $f(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Posons $g(x) = f(x+x_0) = e^{x+x_0} = e^{x_0}e^x$ pour $x \in J = \mathbb{R}$. Alors g est DSE en 0 sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent f est DSE en x_0 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n$.

15.7.2. Régularité des fonctions DSE. —

Théorème 15.41 **(Fonction DSE et dérivation).** — *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction DSE en $x_0 \in I$ sur l'intervalle $J =]-r+x_0, x_0+r[\subset I$, $r > 0$. Alors :*

1. *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J ;*
2. *la fonction dérivée f' est DSE(x_0) sur J ;*
3. *la série entière associée à f' est la série dérivée formelle de la série entière associée à f : pour tout $x \in J$, $(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n) \Rightarrow (f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1})$.*

Démonstration. — En posant $g(x) = f(x+x_0)$ on se ramène au cas d'une fonction DSE(0) : on suppose donc que pour tout $x \in]-r, r[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est de rayon $R \geqslant r > 0$. On va montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1(J)$, que g' est DSE en 0 sur $J =]-r, r[$ et que $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ sur J. Considérons pour cela la série dérivée formelle $\sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}$. On a vu qu'elle a un rayon de convergence égal à R (cf. théorème 15.34). Posons $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ et observons que pour tout $0 < r' < r$:

1. $\sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1}$ CVN donc CVU vers la fonction $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ sur $[-r', r']$
2. $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ CVS en 0 vers a_0.

Par le théorème 14.56, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ CVU vers la fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-r', r']$ avec $g' = h$. En conséquence $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ sur $[-r', r']$. Comme r' est quelconque sous la condition $0 < r' < r$, l'égalité précédente est valable sur $]-r, r[$.
On conclut par un raisonnement par récurrence. □

Remarque 15.42. — Comme conséquence du théorème 15.41, on a aussi pour tout $x \in J$:
$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$, etc..

Exemple 15.43. — On a vu à l'exemple 15.37 que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ est DSE(0) sur $]-1, 1[$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^k$. Par le thèorème 15.41, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$ et pour tout $x \in]-1, 1[$: $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$.

Du théorème 15.41 on tire l'unicité du développement en série.

***Corollaire 15.44* (Unicité du DSE).** — *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction DSE en $x_0 \in I$, de série associée $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k \in \mathbb{R}[[z]]$. Alors $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où $f^{(k)}$ est la dérivée n-ième de f. En particulier, on a unicité du DSE.*

Démonstration. — D'après le théorème 15.41, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k}$$

pour tout x proche de x_0. En particulier $f^{(k)}(x_0) = (k!)a_k$, d'où le resultat. □

***Corollaire 15.45* (Fonction DSE et primitive).** — *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction DSE en $x_0 \in I$ sur l'intervalle $J =]-r+x_0, x_0+r[\subset I$, $r > 0$. Alors, toute primitive F de f sur I est DSE en x_0 sur l'intervalle J et son développement en série entière se déduit de celui de f par primitivation terme à terme, modulo l'ajout d'une constante.*

Démonstration. — Par hypothèse, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ pour tout $x \in J =]-r+x_0, x_0+r[$ où la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence $R \geqslant r > 0$. Considérons la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ déduite de la précédente par primitivation terme à terme. On sait que le rayon de convergence de cette série est celle de sa dérivée formelle, soit R. Le théorème 15.41 implique que la somme $x \in J \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une primitive de f sur J, et cette fonction est donc DSE en x_0 sur J. Or toute autre primitive se déduit de celle-ci par ajout d'une constante. □

Exemple 15.46. — On sait par l'exemple 15.37 que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ est DSE(0) sur $]-1, 1[$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^k$. Par le corollaire 15.45, la fonction $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une primitive de f sur $]-1, 1[$, s'annulant en 0. Par suite la fonction $-\ln(1-x)$ est DSE(0) et pour tout $x \in]-1, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

15.7.3. Formules de Taylor et DSE. —

15.7.3.1. *DSE et développements limités.* — Vous avez sans doute observé sur les divers exemples de DSE un lien avec les développements limités que vous connaissez. De fait :

Proposition 15.47. — *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction DSE en $0 \in I$, de série associée $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k \in \mathbb{R}[[z]]$. Alors on obtient un développement limité de f en 0 à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ (notation : $DL_n(0)$) en tronquant le DSE de f à l'ordre n : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ de rayon $R > 0$ et $0 < r \leqslant R$ tels que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ pour tout $x \in]-r, r[\subset I$, pour un certain $r > 0$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = x^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^{k-n} \right) = x^n \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p+n} x^p \right) = x^n \left(\sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p \right)$$

où $\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_p = a_{p+n} \text{ pour } p \geqslant 1 \end{cases}$. Il s'agit de montrer que $\sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Pour cela considérons la série entière $\sum_{p\geqslant 0} b_p z^p$. On voit que pour $p \geqslant 1$ et pour $0 < r < R$:

$$|b_p| r^p = |a_{p+n}| r^p = \frac{|a_{p+n}| r^{p+n}}{r^n} \leqslant M.$$

(On a même $|a_{p+n}|r^{p+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.) Par le lemme d'Abel 15.11, la série $\sum_{p\geqslant 0} b_p z^p$ CVN sur $\overline{D(0,r')}$ pour tout $0 < r' < R$. On en déduit que la $\sum_{p\geqslant 0} b_p x^p$ CVN (donc CVU) sur $[-r', r']$ vers la fonction $g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p$ continue sur $[-r', r']$ (cf. théorème 14.51. On a même continuité sur $]-R, R[$.). Donc $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. □

15.7.3.2. *DSE et formule de Taylor-Young.* — On tire le corollaire suivant de la proposition précédente (c'est un résultat que nous connaissons déjà, cf. corollaire 15.44) :

Corollaire 15.48. — *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction DSE en $0 \in I$, de série associée $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k \in \mathbb{R}[[z]]$, alors $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ où $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f. En particulier, on a unicité du DSE.*

Démonstration. — Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction DSE en $0 \in I$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0. (C'est le théorème 15.41.) Par suite, par la formule de Taylor[2]-Young[3], f admet un développement de Taylor en 0 d'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Mais par la proposition 15.47, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. On conclut par l'unicité des développements limités. □

Remarque 15.49. — On vient de voir : $\Big(f$ est DSE en $0\Big) \Rightarrow \Big(f$ admet un développement de Taylor-Young à tout ordre en $0\Big)$. Signalons que la réciproque est fausse en général, c'est à dire qu'il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en 0 qui ne sont pas DSE en 0.

15.7.3.3. *Formule de Taylor-Lagrange et DSE.* — Le théorème suivant, sorte de généralisation de la formule des accroissements finis, est conjointement attribué à Taylor et à Lagrange[4].

Théorème 15.50 **(Formule de Taylor-Lagrange).** — *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n([a, b])$ $(a < b)$. Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de f est dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration. — On applique le théorème de Rolle à la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

où A est le réel choisi de tel sorte que $g(a) = 0$, c'est à dire :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

2. Brook Taylor, 1685-1731, mathématicien anglais.
3. William Henry Young, 1863-1942, mathématicien britannique.
4. Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813, mathématicien et physicien français.

Nous avons $g(a) = g(b) = 0$ et, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) - \frac{(b-x)^n}{n!} A \\ &= \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x) \right). \end{aligned}$$

En conséquence, la condition $g'(c) = 0$ avec $c \in]a, b[$ équivaut à $A = f^{(n+1)}(c)$. L'égalité $g(a) = 0$ devient :

$$f(b) = f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Ceci fournit le résultat annoncé. □

Exemple 15.51. — Montrons que la fonction e^x est DSE en 0 sur $\mathbb{R}$, de série entière associée $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ (cf. proposition 15.1). On sait que la série est de rayon de convergence $+\infty$. Montrons à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. C'est clairement vrai pour $x = 0$. Soit donc $x \neq 0$ et appliquons la formule de Taylor-Lagrange (théorème 15.50) à la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x < 0$) : il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c.$$

On en déduit : $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^c \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\max\{0,x\}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci montre que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ CVS vers la fonction e^x sur $\mathbb{R}$.

Exemple 15.52. — Soit $f(x) = \cos(x)$. On cherche à savoir si f est DSE en 0. Remarquons que f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 (et même sur $\mathbb{R}$), ce qui est une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour être DSE en 0. Par ailleurs on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_n(0)$:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \quad \text{avec} \quad a_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \\ \dfrac{(-1)^p}{(2p)!} \text{ si } k = 2p,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Par suite, si f est DSE en 0, alors sa série associée est : $\sum_{k \geqslant 0} a_k z^k = \sum_{p \geqslant 0} \dfrac{(-1)^p}{(2p)!} z^{2p}$.

Recherchons le rayon de convergence de cette série. Pour tout $r > 0$, $|a_k| r^k \leqslant \dfrac{r^k}{k!}$ et $\dfrac{r^k}{k!}$ est le terme général d'une série positive convergente. Par suite, la série $\sum_{k \geqslant 0} a_k z^k$ CVN sur $\overline{D(0, r)}$ pour tout $r > 0$. Le rayon de convergence de cette série entière est donc $R = +\infty$.

Montrons à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. C'est clairement le cas pour $x = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. Par la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $n \in N$, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos^{(n+1)}(c)$$

Par suite $\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |\cos^{(n+1)}(c)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour conclure : la fonction $\cos(x)$ est DSE en 0 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}$.

15.7.4. Tableau de DSE classiques. — Le tableau suivant de DSE classiques est à savoir par coeur, ou à savoir retrouver.

***Proposition 15.53* (DSE en 0 usuels).** — *Ci-dessous, R désigne le rayon de convergence de la série entière.*

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $x \in]-1, 1[$, $R = 1$.
2. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$, $x \in]-1, 1[$, $R = 1$.
3. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-x^k}{k}$, $x \in]-1, 1[$, $R = 1$.
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$, $x \in]-1, 1[$, $R = 1$.
5. $\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $x \in]-1, 1[$ *et* $R = 1$.
6. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$, $x \in]-1, 1[$ *et* $R = 1$ *si* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ *;* $x \in \mathbb{R}$ *et* $R = +\infty$ *si* $\alpha \in \mathbb{N}$.
7. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.
8. $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.
9. $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.
10. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.
11. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.

Démonstration. — 1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ sur $]-1, 1[$: cf. exemple 15.37.

2. $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ sur $]-1, 1[$: se déduit du résultat précédent par substitution $x \to -x$.
3. $\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-x^k}{k}$ sur $]-1, 1[$: se déduit de 1. par primitivation (cf. exemple 15.46).
4. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ sur $]-1, 1[$: se déduit du résultat précédent par substitution $x \to -x$.
5. $\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ sur $]-1, 1[$: on sait que $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Par substitution $x \to x^2$ dans 2., on sait que $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ pour $x \in]-1, 1[$. On conclut par primitivation, sachant que $\mathrm{Arctan}(0) = 0$.
6. Nous y reviendrons dans la section suivante.
7. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ sur $\mathbb{R}$: cf. proposition 15.1.
8. $\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ sur $\mathbb{R}$: se déduit du résultat précédent et du fait que $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
9. $\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ sur $\mathbb{R}$: se déduit de 7. et du fait que $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
10. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ sur $\mathbb{R}$. Cf. exemple 15.52.
11. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ sur $\mathbb{R}$. appliquer la formule de Taylor-Lagrange (raisonnement analogue à l'exemple 15.52).

$\square$

15.7.5. DSE et équations différentielles. —

15.7.5.1. *Un développement en série entière.* — Considérons la fonction suivante,

$$f(x) = (1+x)^\alpha\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

définie sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ et sur $]-1,+\infty[$ sinon. Nous désirons montrer que cette fonction est DSE(0) avec rayon de convergence $R = 1$.

Quand $\alpha \in \mathbb{N}$, ce fait est clair car f est un polynôme !

Examinons donc le cas où α n'est pas un entier naturel. On sait que si f est DSE(0), la série entière correspondante est de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\,.$$

Calculons donc les dérivées sucessives. Par récurrence, il vient

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\,,$$

et donc

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\,.$$

Il s'agit donc d'examiner la série entière suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}_{=a_n} z^n\,.$$

Les a_n ne sont pas nuls car α n'est pas entier. On peut calculer

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha-n}{n+1}\,,$$

de sorte que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

La règle de d'Alembert entraîne que $R = 1$.

Vérifions à présent que f est en effet DSE(0) et que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n\,.$$

Nous pourrions essayer d'utiliser la formule de Taylor-Lagrange, mais elle ne permettrait pas d'obtenir le DSE pour tous les x tels que $|x| < 1$. On va utiliser une équation différentielle.

On observe que, sur $]-1,1[$,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\,,$$

et donc

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)\,.$$

On peut considérer la fonction suivante, définie sur $]-1,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n\,.$$

On sait que S est dérivable et que

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}\,,$$

ou encore

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n .$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
(1+x)S'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \left(\frac{\alpha-n}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \right) x^n \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \left(\frac{\alpha-n}{n} + 1 \right) x^n \\
&= \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \alpha S(x) .
\end{aligned}$$

Les fonctions f et S vérifient la même équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$(1+x)y' - \alpha y = 0 .$$

Sur l'intervalle $]-1,1[$, elle s'écrit aussi

$$y' - \frac{\alpha}{1+x} y = 0 .$$

Nous savons, par le cours sur les équations différentielles, que les solutions sont de la forme

$$y(x) = A(1+x)^\alpha ,$$

pour A réel. Autrement dit,

$$S(x) = A(1+x)^\alpha ,$$

pour un certain A. Pour $x = 0$, on a $1 = S(0) = A$. Ainsi,

$$f(x) = S(x) .$$

15.7.5.2. *Recherche de solution d'une équation différentielle avec un DSE.* —

15.7.5.2.1. *Premier exemple.* — Considérons l'équation différentielle suivante :

$$x^2 f'' - 2xf' + 2f = 0 .$$

Nous savons qu'en général on ne sait pas expliciter une solution d'une telle équation linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants. Ici, nous pourrions ruser en utilisant un changement de variable, mais... évitons les astuces ! Recherchons une solution développable en série entière au voisinage de 0.

On cherche f sous la forme d'une série entière (de rayon de convergence $R > 0$) :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Un calcul donne que

$$xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n ,$$

et

$$x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n .$$

Si on veut que f résolve l'équation, on doit avoir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n(n-1) - 2n + 2)a_n x^n = 0 ,$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2 - 3n + 2)a_n x^n = 0 .$$

Or, nous savons que la somme d'une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, et donc on doit avoir

$$\forall n \geqslant 0 , \quad (n^2 - 3n + 2)a_n = 0 ,$$

ou encore

$$\forall n \geqslant 0 , \quad (n-1)(n-2)a_n = 0 .$$

Lorsque $n \neq 1, 2$, on a donc $a_n = 0$. Notre mystérieuse série entière est donc nécessairement de la forme

$$a_1 x + a_2 x^2 ,$$

avec a_1 et a_2 quelconques. Les seules fonctions DSE en 0 qui satisfont l'équation différentielle sont de cette forme. On vérifie de façon directe que ces solutions conviennent en effet.

Cet exemple laisse songeur car on aurait pu deviner ces solutions de l'équation différentielle et les a_n étaient faciles à trouver ! On va donner un autre exemple un peu moins trivial.

15.7.5.2.2. *Deuxième exemple.* — On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y = 0 .$$

Peut-on trouver une solution DSE(0) ? On cherche y sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Vouloir que y satisfasse l'équation différentielle impose que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 .$$

Cela se reformule ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} n(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 ,$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_{n+1} n(n+1) - a_n\right) x^n = 0 .$$

Il vient donc

$$\forall n \geqslant 0 , \quad n(n+1)a_{n+1} - a_n = 0 .$$

Pour $n = 0$, cela fournit que $a_0 = 0$, comme on pouvait s'y attendre ! Pour $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} a_n \, .$$

Il s'agit d'une suite récurrente, dont le premier terme est a_1. Par récurrence, on trouve

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)n} \frac{1}{n(n-1)} \cdots \frac{1}{2 \cdot 1} a_1 = \frac{a_1}{u_{n+1}} \, ,$$

où, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = (1 \times 2) \times (2 \times 3) \ldots \times ((n-1) \times n) = \prod_{k=1}^{n-1} k(k+1) \, .$$

Simplifions u_n. On a

$$u_n = (n-1)!n! \, .$$

De là, on tire que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$a_n = a_1 \frac{1}{n((n-1)!)^2} \, .$$

La solution trouvée s'écrit sous la forme

$$y(x) = a_1 \left(x + \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n((n-1)!)^2} x^n \right) \, .$$

Il est facile de vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est infini puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \, .$$

15.7.6. En guise de conclusion. — Pour conclure ce cours, nous reprenons ici une définition exprimée en remarque 15.7 :

***Définition 15.54* (Exponentielle complexe).** — On définit **l'exponentielle complexe** par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Puisque la fonction exponentielle réelle est DSE en 0 sur $\mathbb{R}$, de série associée $\sum_{n \geqslant 0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, on sait que l'exponentielle complexe prolonge l'exponentielle réelle sur $\mathbb{C}$. Ce faisant, les propriétés de l'exponentielle réelle sont également prolongées comme le montre la proposition suivante :

Proposition 15.55. — *L'exponentielle complexe vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\partial e^z = e^z$ (où ∂ est la dérivée formelle) ;*
2. *pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.*

Démonstration. — 1. pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\partial e^z = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

2. pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right)$. Observons que les séries entières $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z_1^n}{n!} z^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z_2^n}{n!} z^n$ ont un rayon de convergence égal à $+\infty$ (appliquer la règle de d'Alembert par exemple). Par la proposition 15.31, la série produit de Cauchy $\sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{z_1^p}{p!} \frac{z_2^{n-p}}{(n-p)!} \right) z^n$ a $+\infty$ comme rayon de convergence et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{z_1^p}{p!} \frac{z_2^{n-p}}{(n-p)!} \right) z^n$. Par ailleurs, par la formule du binôme : $\sum_{p=0}^{n} \frac{z_1^p}{p!} \frac{z_2^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$. En faisant $z = 1$ dans l'égalité précédente, il vient : $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$. D'où le résultat.

□

Autre propriété que vous connaissez mais que nous pouvons désormais démontrer :

***Proposition 15.56* (Formule d'Euler).** — *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x+iy} = e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$.

Démonstration. — Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ par la proposition précédente. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\cos(y) + i\sin(y) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^{iy}.\end{aligned}$$

□

Remarque 15.57. — La fonction exponentielle complexe $z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et plus généralement les fonctions complexes du type $z \in D(0,R) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$ une série entière de rayon $R > 0$, sont appelées des **fonctions analytiques complexes** en 0, ou également **fonctions holomorphes** en 0. Ce type de fonctions bénéficient de propriétés extrêmement riches et intéressantes mais dont l'etude relève d'un cours de master.

15.8. Exercices

Exercice 282

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

1. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f et préciser le domaine de convergence.
2. Déterminer le développement en série entière en -1 de la fonction f et préciser le domaine de convergence.

On rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Exercice 283

1. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et préciser le domaine de convergence.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et préciser le domaine de convergence.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

15.8.1. Dérivation et primitivation. —

Exercice 284

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

1. Déterminer le développement en série entière en 0 de f et préciser le domaine de convergence.

2. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction dérivée f' et préciser le domaine de convergence. Que valent $f^{(10)}(0)$ et $f^{(11)}(0)$? ($f^{(k)}$ est la dérivée k-ième de f).
3. Exprimer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ comme somme d'une série numérique convergente.
4. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}\dfrac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\ln(3)$.

Exercice 285

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ et $g(x) = \ln(1+x+x^2)$.

1. Calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de f.
2. Montrer que f est développable en série entière en 0 sur $]-1,1[$ et calculer ce développement. Justifier que f ne peut pas avoir de DSE(0) sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la dérivée g' de g est développable en série entière en 0 et calculer ce développement. On précisera le domaine de convergence.
4. Montrer que g est développable en série entière en 0 et calculer ce développement. On précisera le domaine de convergence.

Exercice 286

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Soit

$$f : x \in]-\infty, \cos(\theta)[\mapsto \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - x}\right) \in \mathbb{R}\,.$$

1. Donner l'intervalle I maximal contenant 0 sur lequel f est dérivable.
2. Montrer que, sur I, la dérivée f' s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions (à valeurs dans $\mathbb{C}$) : $\dfrac{1}{1-xe^{i\theta}}$ et $\dfrac{1}{1-xe^{-i\theta}}$.
3. En déduire le développement en série entière de f en 0 ainsi que son domaine de convergence.

15.8.2. Formule de Taylor et développement en série entière. —

Exercice 287

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{\sin(x)}$. On veut montrer que cette fonction est développable en série entière en 0.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos^{(p)}(x) f^{(n-p)}(x)$$
où $f^{(n)}$ (resp. $\cos^{(n)}$) désigne la dérivée n-ième de f (resp. de cos).
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leqslant e$, $|f^{(1)}(x)| \leqslant e$ et $|f^{(2)}(x)| \leqslant 2e$, puis que $|f^{(n)}(x)| \leqslant (n!)e$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leqslant e|x|^{n+1}\,.$$

4. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vérifie : $R \geqslant 1$.
5. Déduire des questions précédentes que la fonction f est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $]-1,1[$.

15.8.3. DSE classiques. —

Exercice 288

Déterminer le développement en série entière en 0 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes. On précisera le domaine de convergence.

1. $x \mapsto x\exp(-2x)$.
2. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
3. $x \mapsto \exp\Big(x\cosh(\alpha)\Big)\cosh\Big(x\sinh(\alpha)\Big)$ pour $\alpha > 0$ un réel fixé.
4. $x \mapsto \int_0^x \dfrac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
5. $x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 289

L'objectif de l'exercice est de montrer l'égalité : $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

1. Justifier que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer que $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \dfrac{\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que la fonction arctan est DSE(0) sur $]-1,1[$ et calculer ce DSE.
4. Conclure.

CHAPITRE 16

SÉRIES DE FOURIER

16.1. Introduction heuristique et historique

Avant d'expliquer ce que sont les séries de Fourier et de décrire leurs propriétés, nous nous proposons d'analyser un exemple issu de la physique : la propagation de la chaleur dans une tige (de longueur 1) isolée à ses extrémités. Elle est gouvernée par

(i) l'**équation de la chaleur** :

$$\partial_t \Psi(x,t) = \partial_x^2 \Psi(x,t)\,, \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times]0,+\infty[\,,$$

(ii) la **condition initiale** donnée par $\Psi(x,0) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, où $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$,

(iii) et la **condition aux limites** $\Psi(0,t) = \Psi(1,t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

Ce phénomène a intéressé Joseph Fourier (1768-1830) dans sa *Théorie analytique de la chaleur*[(1)] (1822) via les séries qui portent aujourd'hui son nom. On y lit notamment :

« Ce mouvement peut toujours être décomposé en plusieurs autres dont chacun s'accomplit séparément comme s'il avait lieu seul. Cette superposition des effets simples est un des éléments fondamentaux de la théorie de la chaleur. »[(2)]

Nous nous proposons d'examiner les questions suivantes, surtout heuristiquement, par la méthode introduite par Fourier. Posons[(3)]

$$\mathscr{E} = \left\{ \Psi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})\,, \Psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times]0,+\infty[,\mathbb{R}) \right\}\,.$$

Existe-t-il une fonction vérifiant (i), (ii), (iii) et qui soit la restriction d'une fonction de $\mathscr{E}$? Cette solution est-elle unique ?

La réponse à la première question fera apparaître assez naturellement la notion de série de Fourier.

16.1.1. Existence. —

16.1.1.1. *Solutions particulières de l'équation.* — Recherchons des solutions de (i) sous la forme $\Psi(x,t) = \alpha(x)\psi(t)$. On en déduit que

$$\psi'(t)\alpha(x) = \psi(t)\alpha''(x)\,. \qquad (16.1.1)$$

1. voir le Chapitre IV (§239 et suivants)
2. Chapitre III, §203
3. Dans cette section, on pourra choisir la définition suivante. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une fonction φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur un produit d'intervalles ouverts U lorsqu'elle possède des dérivées partielles en tout point (x_0,t_0) de U, jusqu'à l'ordre k, notées $\partial_x^m \partial_t^\ell \varphi(x_0,t_0)$ (avec $m + \ell \leqslant k$), et qu'elles définissent toutes des fonctions continues en les deux variables.

Soit $c \in \mathbb{R}$. Si ψ et α vérifient $\psi'(t) = c\psi(t)$ et $\alpha''(x) = c\alpha(x)$, ils vérifient (16.1.1). Considérons le cas $c < 0$ et écrivons $c = -\omega^2$. On peut donc choisir

$$\psi(t) = e^{-\omega^2 t}$$

et

$$\alpha(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\,.$$

Cherchons aussi des solutions qui satisfont à (iii). On a donc $A = 0$ et $\sin(\omega) = 0$. On doit donc avoir $\omega = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Noter que, dans le cas $c \geqslant 0$, on trouve que α est nulle.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : (x,t) \mapsto \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}$ appartient à $\mathscr{E}$ et satisfait (i) et (iii). Il en est de même de toute combinaison linéaire finie des f_k.

16.1.1.2. *Une solution plus générale.* — Plus généralement, considérons une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty$. Considérons la série définie, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, par

$$S(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k f_k(x,t)\,.$$

Cette série de fonctions est normalement convergente (et donc uniformément). Les f_k sont continues sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et par conséquent S définit une fonction continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. La fonction S vérifie (iii) ; elle est impaire et 2-périodique.

Montrons que $S \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\times]0, +\infty[)$. Soit $a > 0$. Examinons la série des dérivées à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x et m en t, c'est-à-dire

$$\sum_{k\geqslant 1} b_k (k\pi)^n (-k^2\pi^2)^m \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}\,.$$

Cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ puisque

$$\sum_{k\geqslant 1} |b_k| k^{n+2m} e^{-k^2\pi^2 a} < +\infty\,.$$

Il s'ensuit que S admet des dérivées partielles à tout ordre et en toutes les variables. Toutes ces dérivées sont continues sur $\mathbb{R}\times]a, +\infty[$. Il s'ensuit que $S \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\times]a, +\infty[)$ pour tout $a > 0$ et ainsi $S \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\times]0, +\infty[)$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, on a

$$\partial_t S(x,t) = \sum_{k\geqslant 1} -k^2\pi^2 b_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}\,,$$

et

$$\partial_x^2 S(x,t) = \sum_{k\geqslant 1} -k^2\pi^2 b_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}\,,$$

de sorte que S vérifie (i).

16.1.1.3. *Condition initiale.* — Reste à savoir s'il existe une suite $(b_k)_{k\geqslant 1} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$ telle que S satisfasse (ii), c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = S(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x)\,.$$

Il est naturel d'introduire la fonction $\tilde{f}$, prolongement par imparité et 2-périodicité de f. C'est une fonction appartenant à $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Peut-on donc trouver $(b_k)_{k\geqslant 1} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x)\,? \tag{16.1.2}$$

Remarque 16.1. — Ce problème est celui de la **décomposition en série de Fourier** et ce cours va y apporter des réponses générales. Considérant une fonction T-périodique g, à valeurs réelles, peut-on trouver deux suites de coefficients $(a_k(g))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(g))_{k\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$g = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k\geqslant 1} a_k(g)\cos\left(\frac{2k\pi\cdot}{T}\right) + \sum_{k\geqslant 1} b_k(g)\sin\left(\frac{2k\pi\cdot}{T}\right)?$$

Si la fonction g est à valeurs complexes, il s'agit de trouver une suite $(c_k(g))_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{\frac{2ik\pi\cdot}{T}}.$$

Le but du cours est de savoir si de tels coefficients existent et **en quel(s) sens** les séries convergent.

Nous démontrerons plus tard que, pour une fonction périodique, impaire et de classe $\mathscr{C}^1$, une telle suite $(b_k)_{k\geqslant 1} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$ existe. Dans ce cas, il est aisé de trouver l'expression de b_k. Considérons, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^2 \tilde{f}(x)\sin(m\pi x)\mathrm{d}x\,.$$

Par convergence normale et donc uniforme de la série, nous pouvons permuter la série et l'intégrale, si bien que

$$\int_0^2 \tilde{f}(x)\sin(m\pi x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_0^2 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\mathrm{d}x\,.$$

On rappelle que

$$\sin(k\pi x)\sin(m\pi x) = \frac{1}{2}\left(\cos(k\pi x - m\pi x) - \cos(k\pi x + m\pi x)\right)\,.$$

On vérifie alors que, pour $k \neq m$,

$$\int_0^2 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\int_0^2 \sin^2(k\pi x)\mathrm{d}x = 1\,.$$

On en tire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$b_k = \int_0^2 \tilde{f}(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x\,.$$

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on pose donc :

$$\Psi(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_0^2 \tilde{f}(y)\sin(k\pi y)\mathrm{d}y\right)\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}\,.$$

La fonction Ψ satisfait à (i), (ii), (iii) et appartient à $\mathscr{E}$.

16.1.2. Unicité. — Supposons que Ψ_1 et Ψ_2 soient solutions du problème et introduisons, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\delta(t) = \int_0^1 |\Psi_1(x,t) - \Psi_2(x,t)|^2 \mathrm{d}x\,.$$

Par le théorème relatif aux intégrales de fonctions continues à paramètres, on sait que δ est continue sur $[0, +\infty[$. En fait, elle est même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $t > 0$,

$$\delta'(t) = 2\int_0^1 (\Psi_1 - \Psi_2)(\partial_t \Psi_1 - \partial_t \Psi_2)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (\Psi_1 - \Psi_2)\partial_x^2(\Psi_1 - \Psi_2)\mathrm{d}x\,.$$

Pour tout $t > 0$, on peut intégrer par parties et on trouve :

$$\delta'(t) = -2\int_0^2 |\partial_x(\Psi_1 - \Psi_2)|^2 \mathrm{d}x \leqslant 0\,.$$

La fonction δ est donc décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $\delta(0) = 0$ et donc $\delta(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Il s'ensuit que, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$\Psi_1(x,t) = \Psi_2(x,t)\,.$$

16.2. Propriétés hilbertiennes

Soit $T > 0$. Introduisons

$$\mathscr{H} = \mathscr{C}\mathscr{M}_T\,,$$

l'ensemble des fonctions $T - priodiques$ et continues par morceaux.

On pose, pour tout $(f, g) \in \mathscr{H}^2$,

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f\overline{g}\mathrm{d}x\,.$$

Cette quantité est bien définie puisque

$$|f\overline{g}| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)\,,$$

et que le membre de droite est une fonction intégrable.

Proposition 16.2. — *$\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{H}^2$. La norme associée est notée $\|\cdot\|$.*

***Proposition 16.3* (Théorème de Pythagore).** — *Pour tout $(f, g) \in \mathscr{H}^2$ tels que $\langle f, g\rangle = 0$, on a :*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2\,.$$

Définition 16.4. — Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{T}}\,.$$

Lemme 16.5. — *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.*

Exercice 290

Montrer que les familles $\left(\cos\left(\frac{2\pi n\cdot}{T}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sin\left(\frac{2\pi n\cdot}{T}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des familles orthogonales et qu'elles sont orthogonales l'une à l'autre. On calculera la norme de chaque élément de ces familles.

16.2.1. Coefficients et sommes partielles de Fourier. —

***Définition 16.6* (Coefficients de Fourier).** — Pour tout $f \in \mathscr{H}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2i\pi nx}{T}}\mathrm{d}x\,,$$

et

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x\,, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x\,.$$

On observe les relations :

$$c_n(f) + c_{-n}(f) = a_n(f)\,, \quad c_{-n}(f) - c_n(f) = ib_n(f)\,,$$

ou encore :

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\left(a_n(f) - ib_n(f)\right)\,.$$

Remarque 16.7. — Noter que, par périodicité, l'intervalle d'intégration peut être remplacé par n'importe quel intervalle d'amplitude T.

Lemme 16.8. — *On a les propriétés suivantes.*

- *Lorsque f est paire, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_{-n}(f)$. Cela équivaut à $b_n(f) = 0$.*
- *Lorsque f est impaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$. Cela équivaut à $a_n(f) = 0$.*

Exemple 16.9. — On prend $T = 2\pi$. On considère la fonction f, 2π-périodique, impaire, telle que $f(x) = 1$ pour tout $x \in]0,\pi[$ et $f(\pi) = 0$.

On a $c_0(f) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{in^{-1}}{2\pi}\left(-[e^{-int}]_{-\pi}^{0} + [e^{-int}]_0^{\pi}\right) = i(\pi n)^{-1}(-1+(-1)^n)\,.$$

Les coefficients d'ordre pair sont nuls. On calculera les $a_n(f)$ et les $b_n(f)$.

Exemple 16.10. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On considère la fonction 2π-périodique f_α définie par : $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi,\pi[$. On observe que f_α est paire, continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Calculons ses coefficients de Fourier. Les b_n sont nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = 2\pi^{-1}\int_0^{\pi}\cos(\alpha t)\cos(nt)\mathrm{d}t\,.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\pi}\cos(\alpha t)\cos(nt)\mathrm{d}t &= 2\mathrm{Re}\int_0^{\pi}\cos(\alpha t)e^{int}\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{Re}\int_0^{\pi}e^{i\alpha t}e^{int}\mathrm{d}t + \mathrm{Re}\int_0^{\pi}e^{-i\alpha t}e^{int}\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(\alpha+n)\pi}-1}{i(\alpha+n)}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(-\alpha+n)\pi}-1}{i(-\alpha+n)}\right)\\
&= \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(-\alpha+n)\pi}{-\alpha+n}\\
&= 2\alpha(-1)^n\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}\,,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$a_n = 2\pi^{-1}\alpha(-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}\,.$$

Définition 16.11 **(Sommes partielles de Fourier).** — Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n(x)\,.$$

Cela s'écrit aussi

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)\,.$$

On pose

$$E_N = \mathrm{vect}(e_n, -N \leqslant n \leqslant N)\,.$$

Lemme 16.12. — *Pour tout $f \in \mathscr{H}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :*

$$f - S_N(f) \in E_N^{\perp}\,.$$

16.2.2. Inégalité de Bessel et égalité de Parseval. — Le théorème de Pythagore permet d'en déduire la proposition suivante.

Proposition 16.13 **(Inégalité de Bessel).** — *Pour tout $f \in \mathscr{H}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 + \|f - S_N(f)\|^2\,.$$

En particulier, on a :

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|^2\,,$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|^2\,.$$

Proposition 16.14. — *La suite $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge. Sa somme est notée $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$.*

Nous démontrerons plus tard le théorème suivant.

Théorème 16.15. — *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée et*

$$\mathscr{H} \subset \overline{\mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})}\,.$$

Exercice 291

Démontrer l'équivalence mentionnée dans le théorème.

Corollaire 16.16 **(Égalité de Parseval).** — *Pour tout $f \in \mathscr{H}$, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n = f\,, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2\,.$$

En particulier, l'application $\mathscr{H} \ni f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie (bijective).

Démonstration. — Commençons par observer que, par le théorème 16.15, pour tout $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathscr{H}$, il existe $P \in \mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})$ tel que
$$\|f - P\|^2 \leqslant \varepsilon\,.$$
Par définition, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geqslant N_0$,
$$P \in E_{N_0} \subset E_N\,.$$
Par le lemme 16.12 et le théorème de Pythagore, on a, pour tout $N \geqslant N_0$,
$$\|f - P\|^2 = \|\underbrace{f - S_N(f)}_{\in E_N^\perp}\|^2 + \|\underbrace{S_N(f) - P}_{\in E_N}\|^2 \geqslant \|f - S_N(f)\|^2\,.$$
La conclusion s'ensuit.

La deuxième égalité est une conséquence de la première et de la proposition 16.13.
□

Remarque 16.17. — Lorsque f est à valeurs **réelles**, nous pouvons également écrire
$$\frac{1}{4}|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \|f\|^2\,.$$
En effet, on a toujours
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}|c_n(f)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}|c_{-n}(f)|^2\,,$$
et, comme f est à valeurs réelles,
$$|c_n(f)| = |c_{-n}(f)|\,,$$
et
$$|c_n(f)|^2 = \frac{1}{4}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)\,.$$

Exemple 16.18. — Reprenons l'exemple 16.9. On a, au sens de la norme de $\mathscr{H}$,
$$f(\cdot) = i\pi^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^{-1}(-1 + (-1)^n)e^{in\cdot}\,.$$
De plus, l'égalité de Parseval fournit
$$\|f\|^2 = \pi^{-2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^{-2}|-1 + (-1)^n|^2\,.$$
On a :
$$\|f\|^2 = 1\,,$$
de sorte que
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2k+1)^{-2} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$
Comme
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k^{-2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}(2k)^{-2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}(2k+1)^{-2}\,,$$
il s'ensuit
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k^{-2} = \frac{\pi^2}{3}\,,$$
et donc
$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

16.2.3. Régularité et décroissance des coefficients de Fourier. — Grâce à l'inégalité de Bessel, on peut voir que, pour tout $f \in \mathscr{H}$,

$$\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0\,.$$

Par intégration par parties successives, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 16.19. — *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ et T-périodique. Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ et tout $n \in \mathbb{Z}^*$,*

$$c_n(f) = \frac{(-1)^j}{\left(\frac{2i\pi n}{T}\right)^j} c_n(f^{(j)})\,.$$

En particulier,

$$c_n(f) = o(|n|^{-k})\,.$$

Nous disposons d'une réciproque partielle.

Proposition 16.20. — *Soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathscr{H}$ telle que*

$$c_n(f) = \mathscr{O}(|n|^{-k-1-\varepsilon})\,.$$

Alors f est de classe $\mathscr{C}^k$.

Démonstration. — L'hypothèse implique, par comparaison à une série de Riemann, que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\,.$$

On en déduit, par convergence normale, que $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue S. Or, en vertu du corollaire 16.16, $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour $\|\cdot\|$. De plus, on a :

$$\|S_N(f) - S\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |S_N(f)(t) - S(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \|S_N(f) - S\|_\infty^2\,,$$

si bien que

$$\lim_{N \to +\infty} \|S_N(f) - S\| = 0\,.$$

On en tire $S = f$. En particulier, f est continue.

Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_N(f)^{(j)}(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{2in\pi}{T}\right)^j c_n(f) e^{\frac{2in\pi x}{T}}\,.$$

Par hypothèse, on déduit que cette dernière série est normalement convergente puisque :

$$\left| \left(\frac{2in\pi}{T}\right)^j c_n(f) e^{\frac{2in\pi x}{T}} \right| = \left| \left(\frac{2in\pi}{T}\right)^j c_n(f) \right| = \mathscr{O}(|n|^{-1-\varepsilon})\,.$$

On en déduit que la suite $(S_N(f)^{(j)})_{N \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente. On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $j \in \{0, \dots, k\}$,

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2in\pi}{T}\right)^j c_n(f) e^{\frac{2in\pi x}{T}}\,.$$

□

Proposition 16.21. — *Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ et T-périodique. Alors $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Démonstration. — On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(f) = -\frac{1}{in} c_n(f')\,,$$

si bien que

$$2|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\,.$$

Par convergence d'une série de Riemann et l'inégalité de Bessel, on en déduit immédiatement $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. On procède ensuite comme dans la preuve de la proposition 16.20. □

Remarque 16.22. — On peut remplacer $\mathscr{C}^1$ par « continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux ».

Exemple 16.23. — On peut appliquer cette proposition pour répondre positivement à la question (16.1.2).

Exemple 16.24. — Reprenons l'exemple 16.10. On rappelle que dans ce cas $b_n = 0$ et

$$a_n = 2\pi^{-1}\alpha(-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}\,.$$

On retrouve bien que $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. On a, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + 2\pi^{-1}\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx)\,.$$

En prenant $x = \pi$, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\pi \cot(\alpha\pi) = \alpha^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\,.$$

Il s'ensuit que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$,

$$\cot u - \frac{1}{u} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}\,.$$

Par prolongement par continuité en 0, on peut écrire, pour tout $u \in]-\pi, \pi[$,

$$\cot u - \frac{1}{u} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}\,.$$

La série étant normalement convergente sur tout intervalle compact contenu dans $]-\pi, \pi[$, on en tire

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_0^x \left(\cot u - \frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\,.$$

En passant à l'exponentielle, on en déduit le développement en produit eulérien du sinus :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[\,, \qquad \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\,.$$

16.3. Théorème de Dirichlet

16.3.1. Énoncé et preuve. —

16.3.1.1. *Énoncé.* —

***Théorème 16.25* (Dirichlet).** — *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose*

$$f(x^{\pm}) = \lim_{t \to x^{\pm}} f(t)\,,$$

et on suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\int_0^{\eta} \frac{|f(x^{\pm}) - f(x \pm t)|}{t} \mathrm{d}t < +\infty\,.$$

Alors

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\,.$$

Remarque 16.26. — Il se peut que la série de Fourier de f ne converge pas simplement vers f.

16.3.1.2. *Préliminaires.* — Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. On pose

$$D_{N,T}(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{\frac{2i\pi kx}{T}}\,.$$

On peut observer que

$$\frac{1}{T} \int_0^T D_{N,T}(t)\mathrm{d}t = 1\,. \tag{16.3.1}$$

Lemme 16.27. — *On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) D_{N,T}(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T f(x-t) D_{N,T}(t)\mathrm{d}t\,.$$

Lemme 16.28. — *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (T\mathbb{Z})$,*

$$D_{N,T}(x) = \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi x}{T}\right]}{\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right)}\,.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. On a

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\alpha} = 1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} e^{ik\alpha}\right) = 1 + 2\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} \frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{i\alpha}}\right)\,.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\alpha} &= 1 + 2\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha(N+1)/2} \frac{e^{-iN\alpha/2} - e^{iN\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2}}\right) \\
&= 1 + 2\cos\left(\alpha(N+1)/2\right) \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \\
&= 1 + 2\left(\cos(\alpha N/2)\cos(\alpha/2) - \sin(\alpha N/2)\sin(\alpha/2)\right) \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \\
&= \cos(\alpha N) + \frac{\sin(\alpha N)\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\cos(\alpha N)\sin(\alpha/2) + \sin(\alpha N)\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \\
&= \frac{\sin(N + 1/2)\alpha}{\sin(\alpha/2)}\,.
\end{aligned}$$

□

16.3.1.3. *Preuve.* — Nous pouvons maintenant prouver le théorème. Soit $x \in \mathbb{R}$. On examine

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x-t)D_{N,T}(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(x-t)D_{N,T}(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(x-t)D_{N,T}(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(x+t)D_{N,T}(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(x-t)D_{N,T}(t)\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Par parité de $D_{N,T}$ et (16.3.1), on en tire

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} =& \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} (f(x+t)-f(x^+))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t \\
&+ \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} (f(x-t)-f(x^-))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Montrons que les deux intégrales du membre de droite tendent vers 0. Considérons seulement la première, la seconde se traitant de façon similaire. On écrit

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{T/2} (f(x+t)-f(x^+))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t =& \int_{0}^{\eta} (f(x+t)-f(x^+))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\eta}^{T/2} (f(x+t)-f(x^+))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

On a, par le lemme 16.28,

$$\int_{\eta}^{T/2} (f(x+t)-f(x^+))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t = \int_{\eta}^{T/2} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi t}{T}\right]\mathrm{d}t\,.$$

Considérant la fonction continue par morceaux et à support compact (qui est donc d'intégrale absolument convergente sur $\mathbb{R}$) :

$$t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}\mathbb{1}_{[\eta,\frac{T}{2}]}(t)$$

et le lemme de Riemann-Lebesgue, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{\eta}^{T/2} (f(x+t)-f(x^+))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t = 0\,.$$

Par le lemme 16.28,

$$\int_{0}^{\eta} (f(x+t)-f(x^+))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\eta} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi t}{T}\right]\mathrm{d}t\,.$$

Considérant la fonction d'intégrale absolument convergente (par hypothèse) [(4)] :

$$t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}\mathbb{1}_{[0,\eta]}(t)$$

et le lemme de Riemann-Lebesgue, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{0}^{\eta} (f(x+t)-f(x^+))D_{N,T}(t)\mathrm{d}t = 0\,.$$

Cela achève la preuve du théorème de Dirichlet.

---

4. Noter que cette fonction n'est pas nécessairement continue par morceaux à cause du comportement en 0.

16.3.2. Exemple. — Reprenons l'Exemple 16.9. On peut clairement appliquer le théorème de Dirichlet. Pour tout $x \in]0, \pi[$, la série suivante est convergente et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} i(\pi n)^{-1}(-1 + (-1)^n)e^{inx} = 1\,.$$

Pour $x = 0$ ou $x = \pi$, on a aussi convergence et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} i(\pi n)^{-1}(-1 + (-1)^n)e^{inx} = 0\,.$$

Si en $x = \pi$, on choisit une autre valeur que 0 pour f, on voit que f n'est pas la somme de sa série de Fourier en $x = \pi$.

16.4. Théorème de Fejér

16.4.1. Énoncé et preuve. —

16.4.1.1. *Énoncé.* —

Théorème 16.29 **(Fejér).** — *Soit f continue et T-périodique. Soit $M \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$\sigma_M(f)(x) = \frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M} S_m(f)(x)\,.$$

Alors, $\sigma_M(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

16.4.1.2. *Préliminaires.* — Soit $M \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F_{M,T}(x) = \frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M} D_{m,T}(x)\,.$$

Noter que

$$\frac{1}{T}\int_0^T F_{M,T}(t)\mathrm{d}t = 1\,. \tag{16.4.1}$$

Grâce au lemme 16.27, on déduit le lemme suivant.

Lemme 16.30. — *On a :*

$$\sigma_M(f)(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)F_{M,T}(t)\mathrm{d}t\,.$$

Lemme 16.31. — *Soit $M \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (T\mathbb{Z})$, on a :*

$$F_{M,T}(x) = \frac{1}{M+1}\frac{\sin^2((M+1)\pi x/T)}{\sin^2(\pi x/T)}\,.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. On a montré au lemme 16.28 que :

$$\sum_{k=-m}^{m} e^{ik\alpha} = \frac{\sin((m+1/2)\alpha)}{\sin(\alpha/2)}\,.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{M}\frac{\sin((m+1/2)\alpha)}{\sin(\alpha/2)} &= \frac{1}{\sin(\alpha/2)}\mathrm{Im}\left(e^{i\alpha/2}\sum_{m=0}^{M}e^{im\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{\sin(\alpha/2)}\mathrm{Im}\left(e^{i(M+1)\alpha/2}\frac{\sin((M+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)\\ &= \frac{\sin^2((M+1)\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}\,.\end{aligned}$$

□

16.4.1.3. *Preuve.* — Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [-T/2, T/2]$ et $M \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sigma_M(f)(x) - f(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(f(x-t) - f(x))F_{M,T}(t)\mathrm{d}t\,.$$

La fonction f est continue sur le compact $[-T, T]$; elle y est donc uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe $\eta \in]0, T/2]$ tel que, pour tout $(y, z) \in [-T, T]$ tel que $|y - z| \leqslant \eta$, on a

$$|f(y) - f(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

On en déduit que, pour tout $x \in [-T/2, T/2]$ et $t \in [-\eta, \eta]$, $|f(x-t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. On en tire, pour tout $x \in [-T/2, T/2]$,

$$\frac{1}{T}\left|\int_{|t|\leqslant\eta}(f(x-t) - f(x))F_{M,T}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{T}\int_{|t|\leqslant\eta}|f(x-t) - f(x)|F_{M,T}(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

où on a utilisé la positivité de $F_{M,T}$ donnée par le lemme 16.31 et (16.4.1). Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\left|\int_{\eta\leqslant|t|\leqslant T/2}(f(x-t) - f(x))F_{M,T}(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{T(M+1)}\int_{\eta\leqslant|t|\leqslant T/2}\frac{\sin^2((M+1)\pi t/T)}{\sin^2(\pi t/T)}\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{(M+1)\sin^2(\pi\eta/T)}\,.\end{aligned}$$

Pour M assez grand, on a donc :

$$\frac{1}{T}\left|\int_{\eta\leqslant|t|\leqslant T/2}(f(x-t) - f(x))F_{M,T}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

et ainsi, par l'inégalité triangulaire, pour M assez grand et pour tout $x \in [-T/2, T/2]$,

$$|\sigma_M(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

16.4.2. Applications. —

16.4.2.1. *Preuve du théorème 16.15.* — Soit $f \in \mathscr{H}$ et $\varepsilon > 0$. Par densité, il existe $g \in \mathscr{C}^0_0(]0, T[)$ telle que

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\|f - g\|_{L^2(]0,T[)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

On étend g par T-périodicité. Cette extension est continue.

On observe que, pour tout $M \in \mathbb{N}$, $\sigma_M(g) \in \mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})$. De plus,

$$\|\sigma_M(g) - g\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T|\sigma_M(g)(t) - g(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \|\sigma_M(g) - g\|_\infty^2\,,$$

si bien que

$$\lim_{M\to+\infty}\|\sigma_M(g) - g\| = 0\,.$$

Pour M assez grand, on en déduit

$$\|\sigma_M(g) - g\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

et donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\|f - \sigma_M(g)\| \leqslant \varepsilon\,.$$

16.4.2.2. *Un corollaire du théorème de Fejér.* — En utilisant le lemme de Cesàro et le théorème de Fejér, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 16.32. — *Soit f une fonction continue et T-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si la série de Fourier $(S_N(f)(x))_{N\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $f(x)$.*

16.5. Vers la transformation de Fourier

16.5.1. Des séries de Fourier à la transformée de Fourier. —

Proposition 16.33. — *Soit $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que f est nulle hors de $[-A, A]$ et on considère $T > A$. f peut être vue comme une fonction T-périodique. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$g_T(\xi) = T \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \mathbb{1}_{[n,n+1[}\left(\frac{T\xi}{2\pi}\right)\,.$$

On a, uniformément en ξ,

$$\lim_{T\to+\infty} g_T(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration. — Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n_{\xi,T} \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{1}_{[n,n+1[}\left(\frac{T\xi}{2\pi}\right) = 1$. On a

$$g_T(\xi) = Tc_{n_{\xi,T}}(f) = \int_{[-A,A]} f(t)e^{-\frac{2i\pi n_{\xi,T}x}{T}}\mathrm{d}x\,.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|g_T(\xi) - \int_{[-A,A]} f(t)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\right| &\leqslant 2A\|f\|_\infty \sup_{x\in[-A,A]} |e^{-\frac{2i\pi n_{\xi,T}x}{T}} - e^{-ix\xi}| \\ &= 2A\|f\|_\infty \sup_{x\in[-A,A]} |e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(n_{\xi,T}-\frac{T\xi}{2\pi}\right)x} - 1| \\ &\leqslant C(f)T^{-1}\,.\end{aligned}$$

□

***Définition 16.34* (Transformation de Fourier).** — Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on définit

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\,.$$

Proposition 16.35. — *Soit $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, $\widehat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}$, $\xi \mapsto \xi^k \widehat{f}^{(\ell)}(\xi)$ est bornée. En particulier $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe $\int$ d'une part et d'intégrations par parties d'autre part. □

16.5.2. Transformée de Fourier inverse. —

Proposition 16.36. — *Soit $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi \,.$$

Démonstration. — On suppose que f est nulle hors de $[-A, A]$ et on considère $T > A$. f peut être vue comme une fonction T-périodique. Par la proposition 16.21, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{\frac{2i\pi n x}{T}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{T} e^{\frac{2i\pi n x}{T}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} \mathrm{d}t \,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\xi_{n,T} = \frac{2\pi n}{T}$. On remarque que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\xi_{n+1,T} - \xi_{n,T}) g_x(\xi_{n,T}) \,, \quad g_x(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} \,. \tag{16.5.1}$$

On écrit alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\xi_{n+1,T} - \xi_{n,T}) g_x(\xi_{n,T}) - \int_{\mathbb{R}} g_x(\xi) \mathrm{d}\xi &= \sum_{n=-N}^{N} \int_{\xi_{n,T}}^{\xi_{n+1,T}} (g_x(\xi_{n,T}) - g_x(\xi)) \mathrm{d}\xi \\ &\quad - \int_{\xi \geqslant \xi_{N+1,T}} g_x(\xi) \mathrm{d}\xi - \int_{\xi \leqslant \xi_{-N,T}} g_x(\xi) \mathrm{d}\xi + 2\pi \sum_{|n|\geqslant N+1} c_n(f) e^{\frac{2i\pi n x}{T}} \,.\end{aligned}$$

On en déduit, par la proposition 16.35 et comparaison à une intégrale de Riemann, que, pour tout $\alpha \geqslant 1$, il existe $C_\alpha(x)$ tel que

$$\left| \int_{\xi \geqslant \xi_{N+1,T}} g_x(\xi) \mathrm{d}\xi + \int_{\xi \leqslant \xi_{-N,T}} g_x(\xi) \mathrm{d}\xi - 2\pi \sum_{|n|\geqslant N+1} c_n(f) e^{\frac{2i\pi n x}{T}} \right| \leqslant C_\alpha(x) \frac{T^\alpha}{N^\alpha} + \sum_{|n|\geqslant N} |c_n(f)| \,.$$

De plus, on peut appliquer la proposition 16.19 et une comparaison à une série de Riemann pour trouver que

$$\sum_{|n|\geqslant N} |c_n(f)| \leqslant \tilde{C}_\alpha \frac{T^\alpha}{N^\alpha} \,.$$

Puisque g_x est lipschitzienne, on en déduit que

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\xi_{n+1,T} - \xi_{n,T}) g_x(\xi_{n,T}) - \int_{\mathbb{R}} g_x(\xi) \mathrm{d}\xi \right| &\leqslant C_\alpha(x) \frac{T^\alpha}{N^\alpha} + \tilde{C}_\alpha \frac{T^\alpha}{N^\alpha} \\ &\quad + \sum_{n=-N}^{N} C_x \int_{\xi_{n,T}}^{\xi_{n+1,T}} (\xi - \xi_{n,T}) \mathrm{d}\xi \,.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\xi_{n+1,T} - \xi_{n,T}) g_x(\xi_{n,T}) - \int_{\mathbb{R}} g_x(\xi) \mathrm{d}\xi \right| \leqslant \tilde{C}_\alpha(x) \left(\frac{T^\alpha}{N^\alpha} + \frac{N}{T^2} \right) \,.$$

On choisit alors $N = \lfloor T \rfloor^{\frac{3}{2}}$. Il n'y a plus qu'à faire tendre T vers $+\infty$ en rappelant (16.5.1). $\square$