Polynômes orthogonaux

Nicolas RAYMOND

25 mai 2012

1 Vous avez dit base hilbertienne ?

Intégrales à paramètre holomorphe

Théorème 1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit une fonction f sur $I \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui vérifie :*
- *$t \mapsto f(t,z)$ mesurable,*
- *$z \to f(t,z)$ holomorphe sur Ω,*
- *$\forall K \subset \Omega$ compact, il existe $g_K \in L^1(I)$ telle que : $|f(t,z)| \leq g_K(t)$ pour tout $t \in I$ et $z \in K$.*

Alors, si on pose, pour $z \in \Omega$:

$$F(z) = \int_I f(t,z)dt,$$

on définit une fonction holomorphe sur Ω et on peut dériver sous le signe $\int$.

La preuve est élémentaire. La fonction est déjà clairement définie sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $\overline{D}(z_0, R) \subset \Omega$ avec $R > 0$. On a, par holomorphie, pour $z \in D(z_0, R/2)$:

$$F(z) = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_z^{(n)}(t,z_0)}{n!}(z-z_0)^n dt.$$

Il s'agit de majorer :

$$\frac{f_z^{(n)}(t,z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Nous utilisons les inégalités de Cauchy :

$$\left|\frac{f_z^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right| \leq R^{-n}\|f_z\|^\infty_{\mathcal{C}(z_0,R)}(R/2)^n \leq 2^{-n}g_K(t) \in L^1.$$

On conclut avec le théorème de Fubini.

Un exemple de base hilbertienne

Soit w une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que :

$$0 < w(x) \leq Ce^{-\alpha|x|}.$$

On définit :

$$L^2_w = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f|^2 w(x) dx < +\infty\}.$$

On définit un produit scalaire :

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} fgwdx.$$

On définit la suite (P_n) (normalisée) des polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire (obtenue par le procédé d'orthonormalisation standard). Montrons que cette suite est une base hilbertienne. Cette suite est orthonormée par construction. Montrons qu'elle est totale. Soit $f \in L^2_w$ et supposons que :

$$\int_{\mathbb{R}} fP_n wdx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il est aisé d'obtenir par récurrence que :

$$\int_{\mathbb{R}} fx^n wdx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On reconnaît alors une transformée de Fourier. Introduisons en effet :

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)w(x)e^{-ix\xi}dx.$$

F est bien définie sur

$$B = \{\xi : |\Im(\xi)| \leq \frac{\alpha}{4}\}.$$

On a en effet la majoration :

$$|f(x)w(x)e^{-ix\xi}| \leq |f(x)|e^{\alpha|x|/2}e^{x\Im(\xi)-\alpha|x|/2}.$$

Il vient alors :

$$e^{x\Im(\xi)-\alpha|x|/2} \leq e^{-\alpha|x|/4}.$$

Ainsi, pour $\xi \in B$, on a :

$$f(x)w(x)e^{-ix\xi} \in L^1(\mathbb{R}).$$

On vient de majorer la fonction par une fonction indépendante de ξ et intégrable. Cette fonction est holomorphe dans la bande B, il s'ensuit que F est holomorphe sur B et qu'on peut dériver l'intégrale :

$$F^{(n)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^n f(x)w(x)e^{-ix\xi}dx, \quad \forall \xi \in B.$$

Il vient :

$$F^{(n)}(0) = 0.$$

Le théorème du prolongement analytique (B est connexe) impose donc $F = 0$. On trouve en particulier que :

$$\mathcal{F}(fw) = 0.$$

On en conclut que $fw = 0$ et donc $f = 0$.
On conclut par un exemple. On prend $w(x) = e^{-x^2}$ et on pose $f_n = P_n e^{-x^2/2}$. Il est clair que (f_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

2 Polynômes de Laguerre et d'Hermite

Nous allons appliquer le résultat de la section précédente à la résolution de problèmes spectraux.

2.1 Polynômes d'Hermite

Avant de faire connaissance avec l'opérateur qu'on veut examiner, introduisons le informellement. Nous aimerions trouver les λ pour lesquels il existe une fonction ψ non nulle et dans L^2 telle que :

$$(-\partial_x^2 + x^2)\psi = \lambda\psi.$$

Il se trouve que $\psi(x) = e^{-x^2/2}$ fonctionne avec $\lambda = 1$. Une idée simple est alors de considérer le conjugué de l'opérateur (c'est à dire faire un changement de fonction inconnue) :

$$e^{x^2/2}(-\partial_x^2 + x^2)e^{-x^2/2} = 1 + 2(-\partial_x^2 + 2x\partial_x).$$

On va donc étudier :

$$\mathcal{H} = -\partial_x^2 + 2x\partial_x$$

sur $L^2(e^{-x^2/2}dx)$. $\mathcal{H}$ a un avantage : il préserve $\mathbb{R}_N[X]$ pour une raison évidente. De plus, si on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire naturel :

$$(P, Q) = \int_{\mathbb{R}} PQe^{-x^2}dx,$$

on constate que $\mathcal{H}$ est symétrique. C'est une conséquence simple de :

$$\langle(-\partial_x^2 + x^2)\psi, \phi\rangle_{L^2} = \langle\psi, (-\partial_x^2 + x^2)\phi\rangle_{L^2}$$

quand ψ et ϕ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\mathcal{H}$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_N[X]$, il est donc diagonalisable. Soit (λ, P) une paire propre avec P de degré n. On résout :

$$\mathcal{H}P = \lambda P.$$

L'identification des termes dominants contraint : $\lambda = n$ et, cette condition étant satisfaite, cela détermine tous les coefficients modulo le coefficient dominant. Sur $\mathbb{R}_N[X]$ le spectre est donc $0, 1, 2, \cdots, N$ et chaque valeur propre est simple. On note (n, H_n) les paires ainsi trouvées avec H_n normalisée pour la norme naturelle et avec coefficient dominant positif.

Nous venons de mettre en évidence une famille de paires propres pour l'opérateur initial : $(2n+1, H_n(x)e^{-x^2/2})$. Il se trouve, par un argument d'algèbre linéaire élémentaire, que les P_n sont deux à deux orthogonaux (associés à des valeurs propres distinctes) ou de façon équivalente : $\langle H_n(x)e^{-x^2/2}, H_m(x)e^{-x^2/2}\rangle = \delta_{nm}$. La section précédente montre que cette famille est totale dans $L^2(\mathbb{R})$.

2.2 Polynômes de Laguerre

De la même façon, faisons connaissance avec un autre problème quantique. Nous aimerions trouver les valeurs propres de l'oscillateur harmonique radial $2D$:

$$(-\Delta + \|x\|^2)\psi = \lambda\psi.$$

Il est très aisé de trouver que les valeurs de λ qui conviennent puisque nous avons un produit tensoriel : elles sont de la forme $1 + 2n + 1 + 2m = 2 + 2(n+m)$ et on obtient tous les entiers pairs à partir de 2. Ici, pourtant, nous avons une symétrie et nous pourrions l'exploiter pour expliciter un peu les fonctions propres.

À cette fin, on passe en coordonnées polaires et nous trouvons l'opérateur :

$$-\partial_\rho^2 - \rho^{-1}\partial_\rho - \rho^{-2}\partial_\theta^2 + \rho^2$$

agissant sur $L^2(\rho d\rho)$. Par décomposition en série de Fourier, nous sommes amenés à l'étude de :

$$-\partial_\rho^2 - \rho^{-1}\partial_\rho + \rho^{-2}m^2 + \rho^2,$$

sur $L^2(\rho d\rho)$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Sortons de l'espace à poids en posant $t = \rho^2$ et on trouve l'opérateur suivant :

$$-4t\partial_t^2 - 4\partial_t + \frac{m^2}{t} + t,$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$.

Faisons une remarque préliminaire. Pour $m = 0$, on observe que $(2, e^{-t/2})$ est une paire propre.

Pour m quelconque, on peut essayer $t^\alpha e^{-t/2}$ et trouve que $(2+2m, t^{m/2}e^{-t/2})$ fonctionne.

On applique la même idée que dans la section précédente et on examine le conjugué :

$$t^{-m/2}e^{t/2}\left(-4t\partial_t^2 - 4\partial_t + \frac{m^2}{t} + t\right)t^{m/2}e^{-t/2} = -4t\partial_t^2 - 4(m+1-t)\partial_t = 4\mathcal{L}_m + 2m + 2,$$

où :

$$\mathcal{L}_m = -t\partial_t^2 - (m+1-t)\partial_t.$$

Cet opérateur se traite de façon complètement identique à celui de la section précédente ; il est symétrique sur $\mathbb{R}_N[X]$ pourvu qu'on y mette le produit scalaire :

$$(P,Q) = \int_0^{+\infty} PQ\, t^m e^{-t} dt.$$

Ses valeurs propres sont les entiers. De même que précédemment, on en déduit une famille de paires propres $(n, L_n^{(m)})$ de sorte que les $L_n^{(m)}$ sont deux à deux orthogonaux. Ainsi, les fonctions $\left(t^{m/2} L_n^{(m)} e^{-t/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille totale dans $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$.

Dans les coordonnées polaires initiales, la famille s'écrit :

$$\rho^m L_n^{(m)}(\rho^2) e^{-\rho^2/2} e^{im\theta}.$$

En notation complexe, cela donne :

$$z^m L_n^{(m)}(|z|^2) e^{-|z|^2/2}.$$